DIFERENCIABILIDAD - TEOREMAS DE FUNCIÓN INVERSA, ROLLE Y VALOR INTERMEDIO

Semestre 2019-A Daniel Lara

Estos apuntes se basan en las clases de la materia "Complementos de Cálculo", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A por el profesor Paúl Acevedo. Los apuntes son elaborados por Daniel Lara, alumno de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

1. FUNCIÓN INVERSA

Un hecho interesante, sobre el cual se fundamenta la importancia de esta sección, es el establecer un método alternativo para determinar la derivada de la inversa de una función.

De secciones anteriores, sabemos que el Teorema de la inversa continua garantiza la existencia de la inversa de una función sobre un intervalo. Así, nuestro interés se centra en el determinar condiciones suficientes para la existencia de la derivada.

A lo largo de este resumen se considerará $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto.

TEOREMA 1

Sean $f\colon I \to J$ una función estrictamente monótona, continua y sobreyectiva, $f^{-1}\colon J \to I$ la función inversa de f y $c \in J$. Se tiene que si f es diferenciable en $f^{-1}(c)$ y $f'(f^{-1}(c)) \neq 0$, entonces f^{-1} es diferenciable en c y

$$(f^{-1})'(c) = \frac{1}{f'(f^{-1}(c))}.$$

Si $f'(c) = 0$, entonces f^{-1} no es diferenciable en $f(c)$.

EJEMPLO 1. Consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 \end{aligned}$$

de donde, la inversa de f es

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt[3]{x}. \end{aligned}$$

Dado que f es diferenciable y para todo $x \in \mathbb{R}^*$ se tiene que

$$f'(f^{-1}(x)) = f'(\sqrt[3]{x}) = 3(\sqrt[3]{x})^2 \neq 0,$$

entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^*$ tenemos que

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}.$$

2. Teorema del Valor Intermedio

En esta sección consideraremos $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definición 1: Máximo Relativo

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$. Se dice que f *tiene un máximo relativo en* c si existe una vecindad $V_\delta(c)$ tal que

$$f(c) \geq f(x)$$

para todo $x \in V_\delta(c) \cap A$.

Definición 2: Mínimo Relativo

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$. Se dice que f *tiene un mínimo relativo en* c si existe una vecindad $V_\delta(c)$ tal que

$$f(c) \leq f(x)$$

para todo $x \in V_\delta(c) \cap A$.

Definición 3

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$. Se dice que f *tiene un extremo relativo* en c si f tiene un máximo o un mínimo relativo en c.

Teorema 2

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$ un punto interior de A. Se tiene que si f tiene un extremo relativo en c y la derivada de f en c existe, entonces

$$f'(c) = 0.$$

Corolario 3. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua y $c \in A$. Se tiene que si f tiene un extremo relativo en c, entonces la derivada de f en c no existe o es igual a 0.

De aquí, tomaremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

TEOREMA 4: Teorema de Rolle

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $]a,b[$. Se tiene que si $f(a) = f(b) = 0$, entonces existe al menos un $c \in\ ]a,b[$ tal que

$$f'(c) = 0.$$

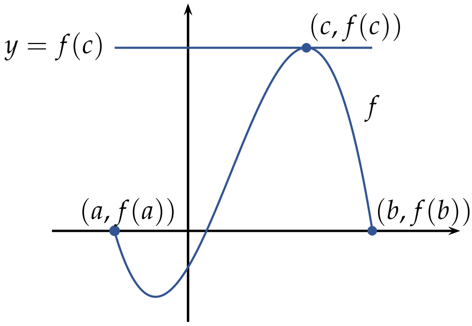

Figura 1: Ilustración del Teorema de Rolle.

TEOREMA 5: Teorema del Valor Medio

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que si f es diferenciable en $]a,b[$, entonces existe al menos un $c \in\ ]a,b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

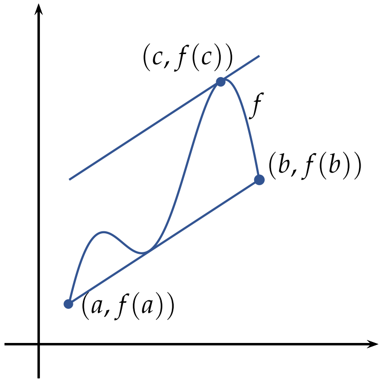

Figura 2: Ilustración del Teorema del Valor Medio.

PROPOSICIÓN 6. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $]a,b[$. Se tiene que si $f'(x) = 0$ para todo $x \in\,]a,b[$, entonces f es la función constante.

TEOREMA 7: Criterio de la primera derivada

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I. Se tiene que

- f es creciente en I si y solo si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$;
- f es decreciente en I si y solo si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

TEOREMA 8: Teorema del Valor Intermedio de Cauchy

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Se tiene que si $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in\,]a,b[$, entonces existe un $c \in\,]a,b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$