1. FUNCIONES

DEFINICIÓN 1: Función

Dados A y B dos conjuntos, f es una ***función de*** *A* ***en*** *B si:*

- $f \subseteq A \times B$;
- *para todo* $x \in A$, *existe* $y \in B$ *tal que* $(x, y) \in f$; *y*
- *si* $(x, y) \in f$ *y* $(x, z) \in f$, *entonces* $y = z$.

Si f es una función de A en B, escribirá $f : A \to B$. Y, en lugar de $(x, y) \in f$, escribiremos $f(x) = y$, ya que dado x, y es único.

En otras palabras, f es una función de A en B si es una relación entre los elementos de A y B de modo que para cada elemento x de A, hay un único elemento y de B que le corresponde a x en esta relación; a ese elemento y se le llama **imagen de x respecto de f y se le representa por** $f(x)$.

DEFINICIÓN 2: Dominio

Dada $f : A \to B$ el conjunto A se llama ***dominio*** *de f y se le representa por* $\operatorname{dom}(f)$.

DEFINICIÓN 3: Imagen o recorrido

Dada una función $f : A \to B$, la ***imagen*** *o el* ***recorrido*** *de f es el conjunto*

$$\{f(x) : x \in A\},$$

que se lo representa por

$$\operatorname{img}(f) \qquad o \qquad \operatorname{rec}(f).$$

DEFINICIÓN 4: Restricción de una función

*Dada una función $f\colon A \to B$ y un conjunto $C \subseteq A$, la **restricción de** f **a** C, denotada por $f|_C$, es la función*

$$\begin{aligned} f|_C\colon C &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 5: Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

Una función $f\colon A \to B$ es:

- ***inyectiva*** *si para todo $u, v \in A$ tales que $f(u) = f(v)$, se tiene que $u = v$;*
- ***sobreyectiva*** *si para todo $v \in B$, existe $u \in A$ tal que $f(u) = v$;*
- ***biyectiva*** *si es inyectiva y sobreyectiva.*

PROPOSICIÓN 1 (Sobreyectiva)**.** Una función $f\colon A \to B$ es sobreyectiva si y solo si $\operatorname{img}(f) = B$.

DEFINICIÓN 6: Composición de funciones

Dadas las funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$, la función

$$\begin{aligned} g \circ f\colon A &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

*se denomina **composición de** g **y** f.*

DEFINICIÓN 7: Función invertible y función inversa

*Una función $f\colon A \to B$ es **invertible** si existe una única función $g\colon B \to A$ tal que para todo $u \in A$ y $v \in B$, se tiene que*

$$v = f(u) \equiv u = g(v)$$

*A esta función se la llama **función inversa de** f y se la denota por f^{-1}. Por tanto, $f^{-1}\colon B \to A$ es tal que*

$$v = f(u) \equiv u = f^{-1}(v)$$

para todo $u \in B$ y todo $v \in A$.

PROPOSICIÓN 2. Dada una función $f\colon A \to B$ invertible, se tiene que

$$f\big(f^{-1}(v)\big) = v \qquad \text{y} \qquad f^{-1}\big(f(u)\big) = u$$

para todo $u \in A$ y todo $v \in B$.

PROPOSICIÓN 3 (Inversa)**.** Una función $f\colon A \to B$ es invertible si y solo si f es biyectiva.

DEFINICIÓN 8: Función creciente, decreciente y monótona

Dada la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ y el conjunto $I \subseteq A$, f es:

- ***creciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u \leq v$, se tiene que $f(u) \leq f(v)$;*
- ***estrictamente creciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u < v$, se tiene que $f(u) < f(v)$;*
- ***decreciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u \leq v$, se tiene que $f(u) \geq f(v)$;*
- ***estrictamente decreciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u < v$, se tiene que $f(u) > f(v)$; y*

- ***monótona en*** *I si es creciente o decreciente en I.*

DEFINICIÓN 9: Conjunto simétrico

*Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es **simétrico** si para todo $x \in A$, se tiene que $-x \in A$.*

DEFINICIÓN 10: Función par e impar

Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$, con A un conjunto simétrico, es:

- ***par*** *si para todo $x \in A$, se tiene que $f(x) = f(-x)$;*
- ***impar*** *si para todo $x \in A$, se tiene que $f(x) = -f(x)$.*

2. FUNCIONES ALGEBRAICAS

DEFINICIÓN 11: Función lineal

Dado $a \in \mathbb{R}$, la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

*se llama **lineal**.*

DEFINICIÓN 12: Función afín

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax + b \end{aligned}$$

*se llama **afín**.*

DEFINICIÓN 13: Función cuadrática

Dados $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$, la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

*se llama **cuadrática**.*

DEFINICIÓN 14: Función polinómica

Dados $n \in \mathbb{N}^*$ y $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$, la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

*se llama **polinómica**.*

DEFINICIÓN 15: Función racional

Dadas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funciones polinómicas, se define $D = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$. La función

$$\begin{aligned} r\colon D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

*se llama **racional**.*

DEFINICIÓN 16: Función radical

Dado $n \in \mathbb{N}^*$, la función

$$\begin{aligned} \rho\colon \mathbb{R}^+ \cup \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt[n]{x}, \end{aligned}$$

donde

$$\left(\sqrt[n]{u}\right)^n = u$$

*para todo $u \geq 0$, se llama **radical**.*

DEFINICIÓN 17: Función algebraica

*Una función es **algebraica** si es la composición de restricciones de funciones lineales, afines, polinómicas, racionales o radicales.*

1. LÍMITES

En este curso se considera a $L \in \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ como un intervalo, $a \in I$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.

DEFINICIÓN 1: Notación de límite

Sean

1. *a y L dos números reales;*
2. *I un intervalo abierto que contiene al número a; y*
3. *$f: A \to \mathbb{R}$ una función tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.*

La notación

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se lee L es el límite de f cuando x tiende a a.

La idea intuitiva de límite es la siguiente: sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función, se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si dada cualquier sucesión de elementos de A que se acerquen a a se tiene que la imagen de esos elementos se acercan a L.

La definición formal de límite de una función en un punto se dará en capítulos posteriores.

TEOREMA 1: Unicidad del límite

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, entonces el número L es el único *número que satisface esta igualdad.*

La existencia del límite de una función en un punto no requiere que ese punto esté en el dominio de la función. El siguiente teorema enfatiza este hecho.

TEOREMA 2: Límite de funciones localmente iguales

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ función tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. Si $g\colon A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ es tal que

$$g(x) = f(x)$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$, entonces existe el límite de g en a y

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

TEOREMA 3: Límites básicos

Se tiene que

$$\lim_{x\to a} x = a$$

y si $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x\to a} c = c.$$

TEOREMA 4: Propiedades algebraicas de los límites

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ funciones. Si existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, entonces:

1. *existe el límite de $f+g$ y*

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x);$$

2. *existe el límite de $f \cdot g$ y*

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x);$$

3. *si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, existe el límite de $\dfrac{1}{g}$ y*

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

TEOREMA 5: Propiedades algebraicas de los límites II

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ funciones y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces:

1. *existe el límite de αf y*

$$\lim_{x\to a}\alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to a} f(x);$$

2. *existe el límite de $f - g$ y*

$$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x);$$

3. *existe el límite de $\alpha f + \beta g$ y*

$$\lim_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x);$$

4. *existe el límite de $\dfrac{f}{g}$ siempre que $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ y*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

TEOREMA 6: Generalización de las propiedades algebraicas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $f_1, f_2, \ldots, f_n\colon A \to \mathbb{R}$ tales que existe el límite $\lim_{x\to a} f_i(x)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, se tiene que:

1. $\lim\limits_{x \to a} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lim\limits_{x \to a} f_i(x)$;

2. $\lim\limits_{x \to a} \prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} \lim\limits_{x \to a} f_i(x)$.

TEOREMA 7: Límite de funciones polinomiales y racionales

Sean $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dos funciones polinomiales. Se tiene que:*

1. $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$ *y*

2. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$, *siempre que* $Q(a) \neq 0$.

TEOREMA 8: Límite de una función radical

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ *una función y* $n \in \mathbb{N}^*$. *Si existen*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y $L > 0$, *entonces* $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)}$ *existe y se tiene que*

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}.$$

1. Monotonía del límite

Teorema 1: Monotonía

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen. Si

$$f(x) \leq g(x)$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

Teorema 2: Teorema del sándwich

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon A \to \mathbb{R}$ y $h\colon A \to \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x\to a} g(x)$ y $\lim_{x\to a} h(x)$ existen. Si

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x)$$

y

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x).$$

2. Límites laterales

DEFINICIÓN 1: Notación de límite laterales

Dados

1. a y L dos números reales;
2. I un intervalo abierto que contiene al número a; y
3. $f : A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.

La notación

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se lee *L es el límite de f cuando x tiende a a por la derecha*. La notación

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se lee *L es el límite de f cuando x tiende a a por la izquierda*.

La idea intuitiva de límite lateral es la siguiente: si $f : A \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A, mayores que a, que se acerquen a a, se tiene que la sucesión de las imágenes de esos elementos se acercan a L. Por otro lado, se dice que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A, menores que a, que se acerquen a a, se tiene que la sucesión de las imágenes de esos elementos se acercan a L.

La definición formal de límites laterales de una función en un punto se dará en capítulos posteriores.

TEOREMA 3: Unicidad del límite lateral

Dada una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ se tiene que

1. si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$, entonces el número L es el *único* número que satisface esta igualdad;

2. si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$, entonces el número L es el *único* número que satisface esta igualdad;

TEOREMA 4: Límite de funciones localmente iguales

Dada una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

- Si $g\colon A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ es tal que

$$g(x) = f(x)$$

  para todo $x \in I \setminus \{a\}$ con $x > a$, entonces existe el límite de g en a por la derecha y

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = L.$$

- Si $g\colon A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ es tal que

$$g(x) = f(x)$$

  para todo $x \in I \setminus \{a\}$ con $x < a$, entonces existe el límite de g en a por la izquierda y

$$\lim_{x\to a^-} g(x) = L.$$

PROPOSICIÓN 5. Los límites laterales cumplen las mismas propiedades algebraicas que los límites.

TEOREMA 6

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función, se tiene que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe y es igual a L si y solo si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existen y son iguales a L.

3. CONTINUIDAD

DEFINICIÓN 2: Continuidad

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función tal que $a \in A$, se dice que f es continua en a si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Se dice que f es continua en A si f es continua en cada punto de A.

DEFINICIÓN 3: Continuidad lateral

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función tal que $a \in A$, se dice que f es continua en a por derecha si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

y se dice que f es continua en a por izquierda si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a).$$

TEOREMA 7: Continuidad de funciones básicas

Se tiene que la función identidad

$$\begin{aligned} I\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

es continua a para todo $a \in \mathbb{R}$.

Si $c \in \mathbb{R}$, entonces la función constante

$$\begin{aligned} K_c \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto c \end{aligned}$$

es continua en a para todo $a \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 8: Propiedades algebraicas de la continuidad

Sean $f \colon A \to \mathbb{R}$ y $g \colon A \to \mathbb{R}$ funciones y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si existen f y g son continuas en a, entonces

1. la función $\alpha f + \beta g$ es continua en a;
2. la función $f \cdot g$ es continua en a; y
3. si $g(a) \neq 0$, la función $\dfrac{f}{g}$ es continua en a.

TEOREMA 9: Continuidad de funciones polinomiales y racionales

Sean $P \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $Q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones polinomiales. Se tiene que:

1. P es continua y
2. $\dfrac{P}{Q}$ es continua en su dominio.

TEOREMA 10: Continuidad de una función radical

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Se tiene que la función

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

para $x \in \mathbb{R}^+$ es continua.

TEOREMA 11: Continuidad de la composición

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \to \mathbb{R}$ funciones, con $\operatorname{img}(f) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

PROPOSICIÓN 12 (Límite de una composición)**.** Sean $f\colon B \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ funciones, con $\operatorname{img}(g) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. Si existe el límite $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ y f es continua en b, entonces existe $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ y

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b).$$

TEOREMA 13: Continuidad de una función algebraica

Toda función algebraica es continua en su dominio.

TEOREMA 14: Continuidad de funciones localmente iguales

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \to \mathbb{R}$ funciones tales que $I \subseteq A \cap B$, con I un intervalo abierto. Si g es continua en a y

$$f(x) = g(x)$$

para $x \in I$, entonces f es continua en a.

COROLARIO 15. Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \to \mathbb{R}$ funciones tales que $I \subseteq A \cap B$, con I un intervalo abierto. Si g es continua en I y

$$f(x) = g(x)$$

para $x \in I$, entonces f es continua en I.

TEOREMA 16: Valor Intermedio

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ con $b > a$. Si f es continua en $[a,b]$, entonces para todo $z \in \mathbb{R}$ entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = z.$$

4. Cambio de variable

Teorema 17: Cambio de variable para límites

Sean $f\colon B \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ funciones, con $\operatorname{img}(g) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. Si:

1. existen $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ y $\dim_{y\to b} f(y)$; y
2. se satisfacen una de las tres condiciones siguientes:
   a) la función f es continua en b;
   b) la función f no está definida en b, es decir, $b \notin A$;
   c) existe un intervalo $]a - r, a + r[$ tal que

   $$g(x) \neq b$$

   para todo $x \in\ ]a - r, a + r[\smallsetminus \{a\}$.

Entonces:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y).$$

Para calcular el límite de una composición como la siguiente

$$\lim_{x\to a} f(g(x)),$$

se puede usar el *cambio de variable*

$$y = g(x)$$

siempre que se cumplan las condiciones de teorema anterior, de esta forma, se tendría

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y)$$

Esto se denomina *método del cambio de variable*.

5. Funciones trigonométricas

Definición 4

Existen dos funciones

$$\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

llamadas funciones seno y coseno que cumplen

- $\cos(0) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ y $\cos(\pi) = -1$;
- para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\cos(y - x) = \cos(y)\cos(x) + \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x);$$

- para todo $x \in \,]0, \pi/2[$ se tiene que

$$0 < \cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

Definición 5

Definamos $D_1 = \mathbb{R} \smallsetminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ y $D_2 = \mathbb{R} \smallsetminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. La función

$$\begin{aligned} \tan\colon D_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}, \end{aligned}$$

se denomina función tangente. Además

$$\begin{aligned} \sec\colon D_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{\cos(x)}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \csc\colon D_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cot\colon D_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \end{aligned}$$

se denominan funciones secante, cosecante y cotangente.

A las funciones seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente se la llama funciones trigonométrica.

Proposición 18. Las funciones trigonométricas son continuas en su dominio.

Proposición 19. Se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

6. Límites al infinito

Definición 6: Notación de límite al infinito

Dados

1. L un número real;
2. I un intervalo no acotado superiormente ; y
3. $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subseteq A$.

La notación
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$
se lee L *es el límite de* f *cuando* x *tiende a más infinito*. Por otro lado, si I es un intervalo no acotado inferiormente, la notación
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$
se lee L *es el límite de* f *cuando* x *tiende a menos infinito*.

La idea intuitiva de límite al infinito es la siguiente: sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$
si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que crezcan indefinidamente sin estar acotados, se tiene que la imagen de esos elementos se acercan a L. Por otro lado, sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$
si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que decrezcan indefinidamente sin estar acotados, se tiene que la imagen de esos elementos se acercan a L.

PROPOSICIÓN 20. Los límites al infinito cumplen las mismas propiedades algebraicas que los límites.

PROPOSICIÓN 21. Se tiene que
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

7. LÍMITES INFINITOS

DEFINICIÓN 7: Notación de límite infinito

Dados

1. a un número real;
2. I un intervalo abierto que contiene al número a; y
3. $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.

La notación

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

se lee *el límite de f cuando x tiende a a es más infinito*. La notación

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

se lee *el límite de f cuando x tiende a a es menos infinito*.

La idea intuitiva de límite infinito es la siguiente: sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que se acerquen a a, se tiene que la imagen de esos elementos crecen indefinidamente sin estar acotada. Por otro lado, sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que se acerquen a a, se tiene que la imagen de esos elementos decrecen indefinidamente sin estar acotada.

Que el límite de una función sea más infinito o menos infinito es una forma de no existencia del límite de la función.

PROPOSICIÓN 22. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,$$

se tiene que si

1. $f(x) > 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
2. $f(x) < 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

PROPOSICIÓN 23 (Propiedades de límites infinitos)**.** Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se tiene que

1. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces
$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty;$$
2. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \mp\infty$, entonces
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty;$$
3. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, entonces
$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0;$$
4. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\beta > 0$, entonces: $\lim_{x\to a} \beta f(x) = \pm\infty$;
5. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\beta < 0$, entonces: $\lim_{x\to a} \beta f(x) = \mp\infty$;
6. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y existe $\lim_{x\to a} g(x)$ o g está acotada inferiormente en un intervalo alrededor de a, entonces
$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \pm\infty;$$

7. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y existe $\lim_{x\to a} g(x) > 0$ o g está acotada inferiormente por un número positivo en un intervalo alrededor de a, entonces:
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \pm\infty;$$
8. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y existe $\lim_{x\to a} g(x) < 0$ o g está acotada superiormente por un número negativo en un intervalo alrededor de a, entonces:
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \mp\infty.$$

PROPOSICIÓN 24. Se tiene que
$$\lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty.$$

TEOREMA 25: Monotonía de límites infinitos

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ tales que
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$
si
$$f(x) \leq g(x)$$
para todo $x \in I \setminus \{a\}$, entonces
$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty.$$

TEOREMA 26: Monotonía de límites infinitos

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ tales que
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$
si
$$g(x) \leq f(x)$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$, entonces

$$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty.$$

1. Concepto de derivada

En esta sección, tomaremos $I \subseteq \mathbb{R}$ como un intervalo.

Definición 1: Razón de cambio promedio

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función, $a \in I$ y $h \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in I$, se define *la razón de cambio promedio de la función f entre a y $a + h$* por

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Este número también es conocido como *variación media* de f en el intervalo que une a y $a + h$.

Una notación para la razón de cambio es la siguiente. Denotamos con Δx el cambio entre a y $a + h$, es decir

$$\Delta x = h,$$

además, si nombramos por y al número $f(x)$, denotamos con Δy el cambio de f entre a y $a + h$, es decir,

$$\Delta y = f(a+h) - f(a).$$

Con esto, la razón de cambio promedio de la función f entre a y $a + h$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Definición 2: Derivada de una función en un punto

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $a \in I$. *La derivada de la función f en a,* denotada por $f'(a)$, es el número

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

siempre que este límite exista. En este caso, se dice que f es *derivable en* a.

También se dice que el número $f'(a)$ es la *razón de cambio instantánea de* f *en* a.

DEFINICIÓN 3: Función derivada

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función, se define

$$A = \{x \in I : f \text{ es derivable en } x\}.$$

La función

$$\begin{aligned} Df\colon A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

se denomina *derivada de* f. Se dice que f es *derivable en* A y su derivada es la función Df.

Otras notaciones para la derivada que se encuentran en la literatura son

$$Df(a) = f'(a) = \frac{df}{dx}(a),$$

y a la función Df también se la llama f'. Además, se tiene la siguiente notación:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)) = (f(x))' = \frac{d}{dx}f(x).$$

Y si para cada x en el dominio de f, nombramos y al número $f(x)$, se escribe

$$\frac{dy}{dx}$$

en lugar de $f'(x)$.

PROPOSICIÓN 1. Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $a \in I$. Se tiene que f es derivable en a si y solo si existe

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

además,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

TEOREMA 2

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene que si f es derivable en $a \in I$, entonces f es continua en a.

PROPOSICIÓN 3. Sea $c \in \mathbb{R}$, se definen las funciones

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto c. \end{aligned}$$

Se tiene que

$$h'(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

La proposición anterior se la puede resumir diciendo que

$$\frac{d}{dx}(x) = (x)' = 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y si $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\frac{d}{dx}(c) = (c)' = 0.$$

PROPOSICIÓN 4. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x)) = (\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$$

y

$$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = (\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, y

$$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = (\tan(x))' = \sec^2(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Proposición 5 (Propiedades algebraicas I)**.** Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones reales derivables en $a \in I$. Se tiene que:

1. $f + g$ es derivable en a y
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a);$$

2. fg es derivable en a y
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$$

3. si $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ es derivable en a y
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Proposición 6 (Propiedades algebraicas II)**.** Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones reales derivables en $a \in I$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se tiene que:

1. λf es derivable en a y
$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

2. $(f - g)$ es derivable en a y
$$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a).$$

3. si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es derivable en a y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

PROPOSICIÓN 7. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}(x^n) = (x^n)' = nx^{n-1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 8: Derivada de funciones localmente iguales

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \to \mathbb{R}$ funciones tales que $I \subseteq A \cap B$, con I un intervalo abierto. Si g es derivable en a y

$$f(x) = g(x)$$

para todo $x \in I$, entonces f es derivable en a y

$$f'(a) = g'(a).$$

COROLARIO 9. Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \to \mathbb{R}$ funciones tales que $I \subseteq A \cap B$, con I un intervalo abierto. Si g es derivable en I y

$$f(x) = g(x)$$

para todo $x \in I$, entonces f es derivable en I y

$$f'(x) = g'(x)$$

para todo $x \in I$.

TEOREMA 10

Sean $f_1\colon A_1 \to \mathbb{R}$ y $f_2\colon A_2 \to \mathbb{R}$ funciones derivables tales que $I \subseteq A_1 \cap A_2$ es un intervalo abierto. Sea

$$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x < a, \\ L & \text{si } x = a, \\ f_2(x) & \text{si } x > a, \end{cases} \end{aligned}$$

donde $A = A_1 \cup A_2$. Si f es continua en a y $f_1'(a) = f_2'(a)$, entonces f es derivable en a y $f'(a) = f_1'(a) = f_2'(a)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} Df\colon A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f_1'(x) & \text{si } x \leq a, \\ f_2'(x) & \text{si } x \geq a. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Regla de la cadena

En esta sección, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ representarán intervalos abiertos.

TEOREMA 11: Regla de la cadena

Sean $f\colon J \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones, con $\operatorname{img}(g) \subseteq J$. Si

1. g es derivable en $a \in I$; y
2. f es derivable en $g(a) \in J$,

entonces $f \circ g$ es derivable en a. Además:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

TEOREMA 12: Derivada de la función inversa

Sean $f\colon I \to J$ una función inversible y $f^{-1}\colon J \to I$ su inversa. Se tiene que para todo $x \in J$, si f es derivable en $f^{-1}(x)$ y $f'\big(f^{-1}(x)\big) \neq 0$, entonces

$$\big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}.$$

PROPOSICIÓN 13 (Trigonométricas inversas)**.** Las funciones

$$\operatorname{sen}|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \qquad \cos|_{[0,\pi]}\colon [0,\pi] \to [-1,1]$$

y

$$\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\colon \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$

son invertibles. Sus inversas son representadas por arc sen, arc cos y arc tan, respectivamente, y denominadas **arcoseno**, **arcocoseno** y **arcotangente**, respectivamente. Por tanto

$$\operatorname{arc\,sen}\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \qquad \operatorname{arc\,cos}\colon [-1,1] \to [0,\pi]$$

y

$$\operatorname{arc\,tan}\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

Además, por la definición de funciones inversas, estas satisfacen las siguientes equivalencias:

1. Para todo $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ y todo $y \in [-1,1]$,

$$y = \operatorname{arc\,sen}(x) \;\equiv\; x = \operatorname{sen} y.$$

2. Para todo $x \in [0,\pi]$ y todo $y \in [-1,1]$,

$$y = \operatorname{arc\,cos}(x) \;\equiv\; x = \cos y.$$

3. Para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$y = \arctan(x) \equiv x = \tan y.$$

PROPOSICIÓN 14. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen}(x)) = (\operatorname{arc\,sen}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y

$$\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = (\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

para todo $x \in \left]-1, 1\right[$, y

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = (\arctan(x))' = \frac{1}{x^2+1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. DERIVADA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

DEFINICIÓN 4

Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{img}(f) \subseteq J$ y $F\colon I \times J \to \mathbb{R}$ funciones tal que para todo $x \in I$ se tiene que

$$F(x, f(x)) = 0,$$

se dice que *la ecuación*

$$F(x, y) = 0,$$

donde $y = f(x)$ *y* $x \in I$, *define la función* f *implícitamente*. Se dice también que la ecuación *define implícitamente* y *como función de* x.

TEOREMA 15: Derivada de la función implícita

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{img}(f) \subseteq J$ y $F\colon I \times J \to \mathbb{R}$ funciones. Supongamos que f está definida de manera implícita con respecto a F y definamos

$$\begin{aligned} g\colon\ I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x, f(x)). \end{aligned}$$

Se tiene que si g es derivable en $x \in I$, entonces

$$g'(x) = 0.$$

1. DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR

DEFINICIÓN 1: Segunda derivada

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I, si la función Df es derivable en $a \in I$, entonces se dice que f es **dos veces derivable en** a y la derivada de Df en a se la denota por $f''(a)$ y se le denomina **la segunda derivada de** f **en** a.

DEFINICIÓN 2: Función segunda derivada

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función, se define

$$A = \{x \in I : f \text{ es dos veces derivable en } x\}.$$

La función

$$\begin{aligned} D^2 f\colon A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f''(x) \end{aligned}$$

se denomina *segunda derivada de* f. Se dice que f es *dos veces derivable en* A y su **segunda derivada** es la función $D^2 f$.

Otras notaciones para la derivada que se encuentran en la literatura son

$$D^2 f(a) = f''(a) = f^{(2)}(a) = \frac{d^2 f}{dx^2}(a),$$

y a la función $D^2 f$ también se la llama f'' o $f^{(2)}$. Además, se tiene la siguiente notación:

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = (f(x))'' = \frac{d^2}{dx^2} f(x).$$

Y si para cada x en el dominio de f, nombramos y al número $f(x)$, se escribe

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

en lugar de $f''(x)$.

DEFINICIÓN 3

Sean $n \in \mathbb{N}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $a \in I$. Se define la n-ésima derivada de f en a, denotado por $f^{(n)}(a)$, de la siguiente manera:

- para $n = 0$, $f^{(0)}(a) = f(a)$;
- suponemos que f es n veces derivable en I y su derivada es $f^{(n)}$, se dice que f es $n+1$ veces derivable si $f^{(n)}$ es derivable en a y se denota $f^{(n+1)}(a) = (f^{(n)})'(a)$.

Otras notaciones para la derivada que se encuentran en la literatura son

$$D^n f(a) = f^{(n)}(a) = \frac{d^n f}{dx^n}(a),$$

y a la función $D^n f$ también se la llama $f^{(2)}$. Además, se tiene la siguiente notación:

$$f^{(2)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(f(x)) = \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$

Y si para cada x en el dominio de f, nombramos y al número $f(x)$, se escribe

$$\frac{d^n y}{dx^n}$$

en lugar de $f^{(n)}(x)$.

2. FÓRMULA DE TAYLOR

Teorema 1: Fórmula de Taylor de primer orden

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $a \in I$, entonces existe $r > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{R}$ que cumple $|h| < r$, se tiene que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + hE(a,h),$$

donde $\lim\limits_{h\to 0} E(a,h) \to 0$.

De forma equivalente, si $|x-a| < r$, tenemos que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)E(a,x)$$

donde $\lim\limits_{x\to a} E(a,x) \to 0$.

Proposición 2 (Aproximación lineal)**.** Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $a \in I$, entonces la función $F\colon I \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = f(a) + f'(a)(x-a),$$

para $x \in I$, es una buena aproximación lineal de la función f cerca de a, es decir,

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x) - f(x)}{x-a} = 0.$$

Teorema 3: Fórmula de Taylor de segundo orden

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en $a \in I$, entonces existe $r > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{R}$ que cumple $|h| < r$, se tiene que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + h^2E(a,h),$$

donde $\lim\limits_{h\to 0} E(a,h) \to 0$.

De forma equivalente, si $|x-a|<r$, tenemos que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + (x-a)^2 E(a,x)$$

donde $\lim\limits_{x\to a} E(a,x) \to 0$.

Proposición 4 (Aproximación cuadrática)**.** Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en $a \in I$, entonces la función $F\colon I \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2,$$

para $x \in I$, es una buena aproximación cuadrática de la función f cerca de a, es decir,

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x) - f(x)}{(x-a)^2} = 0.$$

Teorema 5: Fórmula de Taylor de orden n

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $a \in I$, entonces existe $r > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{R}$ que cumple $|h| < r$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n E(a,h), \end{aligned}$$

donde $\lim\limits_{h\to 0} E(a,h) \to 0$.

De forma equivalente, si $|x-a|<r$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n E(a,x), \end{aligned}$$

donde $\lim\limits_{x \to a} E(a,x) \to 0$.

3. Regla de l'Hôpital

Teorema 6: Regla de l'Hôpital I

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos función derivables en I. Supongamos que para $a \in I$ se tiene que $f(a) = g(a) = 0$ y $g'(x) \neq 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$, se tiene que si

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema 7: Regla de l'Hôpital II

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos función derivables en I. Supongamos que para $a \in I$ se tiene que $f(a) = g(a) = 0$ y $g'(x) \neq 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$, se tiene que si

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty,$$

entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty.$$

Teorema 8: Regla de l'Hôpital II

Sean $a \in I$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos función derivables en $I \setminus \{a\}$. Supongamos que tiene que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ y $g'(x) \neq 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$, se tiene que si

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe, entonces
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

DEFINICIÓN 1: Recta tangente

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $c \in I$. La recta de ecuación

$$y = f(c) + f'(c)(x - c),$$

cuya pendiente es el número $f'(c)$, se llama **recta tangente a la gráfica de f en el punto** $(c, f(c))$.

2. TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA FUNCIONES DERIVABLES

En esta sección, asumiremos que $I = [a, b]$, con $a < b$.

DEFINICIÓN 2: Punto interior

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $c \in A$, se dice que c es un punto interior de A si existe un $r > 0$ tal que

$$]c - r, c + r[\subseteq A.$$

Al conjunto de los punto interiores de A se lo denota por $\operatorname{int}(A)$ y se llema el interior de A.

De aquí, se tiene que

$$\operatorname{int}(I) = \operatorname{int}([a, b[) = \operatorname{int}(]a, b]) = \operatorname{int}(]a, b[) =]a, b[\,.$$

TEOREMA 1: Valor de Rolle

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $\operatorname{int}(I)$. Se tiene que si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in \operatorname{int}(I)$ tal que $f'(c) = 0$.

TEOREMA 2: Valor de medio para funciones derivables

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $\operatorname{int}(I)$. Se tiene que existe $c \in \operatorname{int}(I)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

TEOREMA 3: Valor de medio de Cauchy

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones es continua en I y derivable en $\operatorname{int}(I)$. Se tiene que existe $c \in \operatorname{int}(I)$ tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c),$$

en caso de que $g(b) \neq g(a)$, se tiene que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

PROPOSICIÓN 4. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $\operatorname{int}(I)$. Si

$$f'(x) = 0$$

para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = c$$

para todo $x \in I$, es decir, f es una función constante en I.

PROPOSICIÓN 5. Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones continuas en I

y derivables en $\text{int}(I)$. Si

$$f'(x) = g'(x)$$

para todo $x \in \text{int}(I)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = g(x) + c$$

para todo $x \in I$.

TEOREMA 6: Fórmula de Taylor de orden n

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en I tal que $f^{(n)}$ es derivable en $\text{int}(I)$, entonces para para todo $a \in I$ y todo $x \in I$, existe c entre a y x se tiene que

$$f(x) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

3. EXTREMOS

En esta sección, asumiremos que $I = [a, b]$, con $a < b$.

DEFINICIÓN 3: Extremos globales

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Decimos que

- f alcanza un máximo global en c y que su máximo (global) es $f(c)$ si
$$f(x) \leq f(c)$$
para todo $x \in I$;
- f alcanza un mínimo global en c y que su mínimo (global) es $f(c)$ si
$$f(x) \geq f(c)$$

para todo $x \in I$.

TEOREMA 7

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que f alcanza su mínimo global y su máximo global en I.

Si denotamos por m a su mínimo y por M a su máximo, se tiene que existe $x_m \in I$ y $x_M \in I$ tales que

$$m = f(x_m) \qquad \text{y} \qquad M = f(x_M)$$

y para todo $x \in I$, se verifica que

$$m \leq f(x) \leq M.$$

En otras palabras, se tiene que $\operatorname{img}(f) = [m, M]$.

DEFINICIÓN 4: Extremos locales

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Decimos que

- f alcanza un máximo local en c y es igual a , y su máximo local es $f(c)$, si existe $r > 0$ tal que

  $$f(x) \leq f(c)$$

  para todo $x \in [c - r, c + r] \cap I$;

- f alcanza un mínimo local en c, y su mínimo local es $f(c)$, si existe $r > 0$ tal que

  $$f(x) \geq f(c)$$

  para todo $x \in [c - r, c + r] \cap I$.

DEFINICIÓN 5: Puntos críticos

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Decimos que c es un punto crítico de f si

- f no es derivable en c, o
- f es derivable en c y $f'(c) = 0$.

TEOREMA 8

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua y $c \in \operatorname{int}(I)$. Si f alcanza un extremo local en c, entonces c es un punto crítico de f.

PROPOSICIÓN 9. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I, se tiene que f alcanza sus extremos globales en puntos críticos del interior de I o en los extremos de I.

4. MONOTONÍA

En esta sección, asumiremos que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $A \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $I \subseteq A$.

TEOREMA 10: Monotonía

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $\operatorname{int}(I)$. Se tiene que

- si $f'(x) > 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es estrictamente creciente en I;
- si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es creciente en I;
- si $f'(x) < 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es estrictamente decreciente en I; y
- si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es decreciente en I.

PROPOSICIÓN 11. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y $c \in \operatorname{int}(I)$. Se tiene que

- si existe $r > 0$ tal que f es creciente en $]c-r, c[$ y decreciente en $]c, c+r[$, entonces f alcanza un máximo local en c;
- si existe $r > 0$ tal que f es decreciente en $]c-r, c[$ y creciente en $]c, c+r[$, entonces f alcanza un mínimo local en c.

TEOREMA 12: Criterio de la primera derivada para extremos

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y $c \in \operatorname{int}(I)$ un punto crítico de f. Suponga que existe $R > 0$ tal que f es derivable en $(]c-R, c+R[\smallsetminus \{c\}) \cap I$. Se tiene que

- si existe $r > 0$ tal que $f'(x) \geq 0$ para $x \in]c-r, c[$ y $f'(x) \leq 0$ para $x \in]c, c+r[$, entonces f alcanza un máximo local en c;
- si existe $r > 0$ tal que $f'(x) \leq 0$ para $x \in]c-r, c[$ y $f'(x) \geq 0$ para $x \in]c, c+r[$, entonces f alcanza un mínimo local en c.

Este teorema se lo puede parafrasear como sigue:

- si cerca del punto c, f' cambia de negativa a positiva en c, recorriendo de izquierda a derecha, entonces f alcanza un mínimo local en c;
- si cerca del punto c, f' cambia de positiva a negativa en c, recorriendo de izquierda a derecha, entonces f alcanza un máximo local en c.

5. CONVEXIDAD

En esta sección, asumiremos que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $A \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $I \subseteq A$.

DEFINICIÓN 6: Convexidad y concavidad

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es

- convexa en I si para todo $x, y \in I$ y todo $t \in [0, 1]$ se tiene que

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x);$$

- cóncava en I si para todo $x, y \in I$ y todo $t \in [0, 1]$ se tiene que

$$f(ty + (1-t)x) \geq tf(y) + (1-t)f(x).$$

Se puede parafrasear el teorema anterior se la siguiente manera: se dice que f es

- convexa en I si para todo $x, y \in I$ la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ queda sobre el gráfico de f.
- cóncava en I si para todo $x, y \in I$ la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ queda bajo el gráfico de f.

En la literatura, se puede encontrar que se nombra "cóncava hacia arriba" en lugar de "convexa" y "cóncava hacia abajo" en lugar de "concava".

TEOREMA 13: Criterio de la primera derivada para la convexidad

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en I, con I un intervalo abierto. Se tiene que

- si f' es creciente en I, entonces f es convexa en I; y
- si f' es decreciente en I, entonces f es cóncava en I.

TEOREMA 14: Criterio de la segunda derivada para la convexidad

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en I y dos veces derivable en I, con I un intervalo abierto. Se tiene que

- f es convexa en I si y solo si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$; y
- f es cóncava en I si y solo si $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

DEFINICIÓN 7: Puntos de inflexión

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in \operatorname{int}(I)$. Si existe $r > 0$ tal que

- f es convexa en $[c-r, c]$ y
- f es cóncava en $[c, c+r]$,

o viceversa, se dice que f tiene un punto de inflexión en c y al punto $(c, f(c))$ se lo llama punto de inflexión.

PROPOSICIÓN 15. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Si tiene que f tiene un punto de inflexión en c, entonces

- f no es dos veces derivable en c, o
- f es dos veces derivable en c y $f''(c) = 0$.

TEOREMA 16: Criterio de la segunda derivada para extremos

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en I tal que f'' es continua en I. Se tiene que si

- $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f alcanza un mínimo local en c;
- $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f alcanza un máximo local en c.

1. OPTIMIZACIÓN

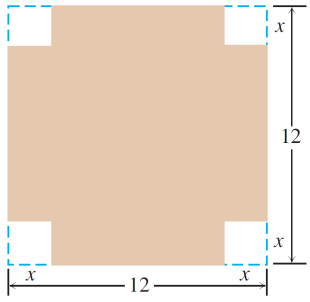
Resolver un problema de optimización significará determinar los valores extremos de una función y los puntos donde los alcanza.
Si la función representa una determinada situación, el proceso de obtención de esa función a partir de la situación se conoce con el nombre de *modelización* o *modelamiento*. En este proceso, es importante enfatizar en la definición de la función (dominio, recorrido y regla de asignación).

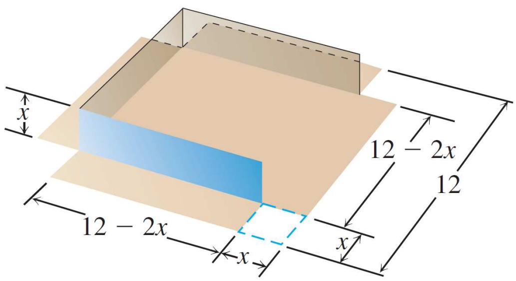
EJERCICIO 1. Una caja sin tapa se construye cortando pequeños cuadrados congruentes de las esquinas de una cartulina de 12 cm por 12 cm y doblando los lados hacia arriba. ¿De qué tamaño se deben cortar los cuadros de las esquinas para que la caja tenga la máxima capacidad o volumen posible?

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- x: longitud del lado del cuadrado recortado, en centímetros.
- $V(x)$: volumen de la caja formada al recortar un cuadrado de longitud x centímetros, en centímetros cúbicos.

Con esto, considere los siguientes gráficos:





Dado que el cuadrado se recorta de una cartulina de 12 cm por 12 cm, x únicamente puede tomar los valores entre 0 y 6. Con esto, se tiene que la función que modela el volumen de la caja es

$$\begin{aligned} V\colon\ [0,6] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto x(12-2x)(12-2x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x. \end{aligned}$$

Por tanto, para encontrar el volumen máximo, debemos determinar el máximo de esta función. Para ello, procedamos a derivar la función V; se tiene que

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144$$

para $x \in\ ]0,6[$. Ahora, para encontrar sus puntos críticos, notemos que

$$\begin{aligned} V'(x) = 0 \quad &\equiv \quad 12x^2 - 96x + 144 = 0 \\ &\equiv \quad (x = 2 \vee x = 6). \end{aligned}$$

Así, los puntos críticos son 2 y 6. Como la función está definida en un intervalo cerrado y acotado, la función alcanza su máximo en los extremos del intervalo o en los puntos críticos del interior, es decir, en los puntos 0, 2 y 6. Dado que tenemos

$$V(0) = 0, \qquad V(2) = 128 \qquad \text{y} \qquad V(6) = 0,$$

la función V alcanza el máximo valor de 128 en 2. y

En resumen, se tiene que hay que recortar un cuadrado cuyo lado mida 2 centímetros para lograr que la caja tenga el volumen máximo: 128 centímetros cúbicos. □

> En la jerga matemática se suele decir que "hay que maximizar" o "hay que minimizar" una función. En sentido estricto, esas frases no tienen sentido; no obstante, lo que quieren decir es que "hay que encontrar el valor máximo que toma la función y el o los puntos en los que se alcanza este máximo" (lo mismo para el mínimo).

2. Graficación de curvas

Definición 1: Asíntotas horizontales

Dada una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que la gráfica de f tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = L$ si

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L.$$

Definición 2: Asíntotas verticales

Dada una función $f\colon I \to \mathbb{R}$, se dice que la gráfica de f tiene una asíntota horizontal de ecuación $x = a$ si f no es continua en a y

$$\lim_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty.$$

3. Razón de cambio relacionadas

Ejercicio 2. Un radar que está a 12 kilómetros de una base militar detecta que un avión sobrevuela la base a 9 000 metros de altura y que se dirige hacia el radar, manteniendo su altitud y velocidad. Si la rapidez con que decrece la distancia entre el avión y el radar es de 500 kilómetros por hora, ¿a qué velocidad vuela el avión?

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- t: el tiempo en horas.
- $x(t)$: distancia horizontal (en kilómetros) entre el radar y el avión en el momento t horas.
- $z(t)$: distancia total (en kilómetros) entre entre el radar y el avión en el momento t horas.

Con esto, se tiene que

$$x(0) = 12, \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dt}(0) = 500.$$

Puesto que el avión conserva una altitud constante de 9 kilómetros por hora, se tiene la siguiente relación:

$$z(t) = \sqrt{(x(t))^2 + 9^2},$$

de donde, derivando con respecto a t, obtenemos

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{x(t)}{\sqrt{(x(t))^2 + 81}} \cdot \frac{dx}{dt}(t);$$

por tanto,

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{\sqrt{(x(t))^2 + 81}}{x(t)} \cdot \frac{dz}{dt}(t).$$

Evaluando en $t = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}(0)&\frac{\sqrt{(x(0))^2 + 81}}{x(0)} \cdot \frac{dz}{dt}(0) \\ &= \frac{\sqrt{12^2 + 81}}{12} \cdot 500 \\ &= 625.\end{aligned}$$

Así, la velocidad del avión es de 625 kilómetros por hora cuando sobrevuela la base. □

4. CEROS DE FUNCIONES

En esta sección asumiremos que $I = [a, b]$, con $a < b$.

DEFINICIÓN 3: Método de Newton

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua y dos veces derivable tal que

$$f(a)f(b) < 0$$

y existen constantes positivas m y M para las cuales

$$|f'(x)| \geq m \quad \text{y} \quad |f''(x)| < M$$

para todo $x \in I$.

Dado que f es continua, existe $c \in I$ tal que

$$f(c) = 0.$$

Además, existe un intervalo abierto $J \subseteq I$ que contiene a c tal que para cualquier $x_0 \in J$, la sucesión (x_n) definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

para $n \in \mathbb{N}$, toma valores cercanos a c a medida que n toma valores "suficientemente grandes".

1. Definición formal del límite

En este curso se considera a $L \in \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ como un intervalo, $a \in I$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.

Definición 1: Límite

Sean

1. a y L dos números reales;
2. I un intervalo abierto que contiene al número a; y
3. $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.

Se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$, se cumple que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es equivalente lógicamente a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Comentarios.

1. Si $f\colon A \to \mathbb{R}$, para demostrar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, se suele proceder de la siguiente manera. Se toma $\varepsilon > 0$; el objetivo es encontrar un $\delta > 0$ tal que si

$0 < |x - a| < \delta$, se verifique la desigualdad

$$|f(x) - L| < \varepsilon. \tag{1}$$

Para ello, se "trabaja" el lado izquierdo de la desigualdad (1) hasta obtener, en lo posible, una desigualdad del siguiente tipo:

$$|f(x) - L| \leq |x - a| g(x) \tag{2}$$

para todo $x \in A \setminus \{a\}$.

Si la expresión $g(x)$ fuera una constante (es decir, independiente de x), por ejemplo M, tendríamos:

$$|f(x) - L| \leq |x - a| M \tag{3}$$

para todo $x \in A \setminus \{a\}$. Entonces, para que la desigualdad (1) se verifique, es suficiente que

$$|x - a| M < \varepsilon$$

para $x \in A \setminus \{a\}$; es decir, es suficiente que

$$|x - a| < \frac{\varepsilon}{M}$$

para $x \in A \setminus \{a\}$. Por lo tanto, si definiéramos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M},$$

tendríamos que, si $0 < |x - a| < \delta$, se verificaría

$$|f(x) - L| = |x - a| M < \delta M = \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

En el caso de que $g(x)$ no fuera una función constante, lo que se suele hacer es encontrar un $\delta' > 0$ tal que $(a - \delta', a + \delta') \subseteq A \cup \{a\}$ y

$$|g(x)| \leq M,$$

para todo $x \in (a - \delta', a + \delta')$. Entonces, es suficiente tomar δ así:

$$\delta = \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{M}, \delta'\}. \qquad \square$$

Ejercicio 1. Demostrar que $\lim_{x \to 3}(8x - 15) = 9$.

Demostración. En este caso, consideramos

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 8x - 15. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Debemos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x - 3| < \delta$, se verifique la desigualdad

$$|(8x - 15) - 9| < \varepsilon. \tag{4}$$

Para hallar el número δ, observemos que:

$$\begin{aligned} |(8x - 15) - 9| &= |8x - 24| \\ &= |8(x - 3)| \\ &= 8|x - 3| \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, para que la desigualdad (4) se verifique, es suficiente que

$$8|x - 3| < \varepsilon,$$

que equivale a

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Por lo tanto, si definimos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{8},$$

tenemos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x - 3| < \delta$, entonces

$$|(8x - 15) - 9| = 8|x - 3| < 8(\delta) = 8\left(\frac{\varepsilon}{8}\right) = \varepsilon. \qquad \square$$

Ejercicio 2. Demostrar que $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 3x + 2} = -5$.

Demostración. Puesto que

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2),$$

consideramos

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R} \setminus \{1,2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \qquad &\longmapsto \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 3x + 2}. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Debemos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$, si $0 < |x-1| < \delta$, se verifique la desigualdad

$$\left| \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 3x + 2} - (-5) \right| < \varepsilon. \tag{5}$$

Podemos observar que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 3x + 2} - (-5) \right| &= 7 \left| \frac{(x-1)^2}{(x-2)(x-1)} \right| \\ &= \frac{7}{|x-2|} |x-1| \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$. Para acotar superiormente el factor $\dfrac{1}{|x-2|}$, supongamos que $x \in \ (1-\delta', 1+\delta')$ para $\delta' = \frac{1}{2}$; es decir, supongamos que

$$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}, \tag{6}$$

que equivale a suponer que

$$|x-1| < \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Ahora, a partir de (7) y (6), "construimos" el factor $\dfrac{1}{x-2}$:

$$\begin{aligned} |x-1| < \frac{1}{2} &\Longrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ &\Longrightarrow -\frac{3}{2} < x - 2 < -\frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{|x-2|} < 2 \end{aligned}$$

$$\implies \frac{1}{|x-2|}|x-1| < 2|x-1|.$$

Por tanto, si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ y $0 < |x-1| < \frac{1}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 3x + 2} - (-5) \right| &= \frac{7}{|x-2|}|x-1| \\ &< 14|x-1|; \end{aligned}$$

es decir, si $0 < |x-1| < \frac{1}{2}$ y $x \neq 2$, tenemos

$$\left| \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 3x + 2} - (-5) \right| < 14|x-1|. \tag{8}$$

Luego, para que las desigualdades (8) y (5) se cumplan, es necesario que:

$$|x-1| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad |x-1| < \frac{\varepsilon}{14}.$$

Por lo tanto, si definimos

$$\delta = \text{mín}\left\{ \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{14} \right\},$$

tenemos que, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, si $0 < |x-1| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 3x + 2} - (-5) \right| < \varepsilon. \qquad \square$$

PROPOSICIÓN 1. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función tal que $a \in A$, se tiene que f es continua en a si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

DEFINICIÓN 2: Límite laterales

Dados

1. a y L dos números reales;
2. I un intervalo que contiene al número a; y
3. $f : A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.

Se dice que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se dice que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

DEFINICIÓN 3: Límite al infinito

Dados

1. L un número real;
2. I un intervalo no acotado superiormente; y
3. $f : A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subseteq A$.

Se dice que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se dice que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

DEFINICIÓN 4: Límite infinito

Dados

1. a un número real;
2. I un intervalo que contiene al número a; y
3. $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.

Se dice que

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

si para todo $R > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > R.$$

Se dice que

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

si para todo $R > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -R.$$

2. EJEMPLOS

EJERCICIO 3. Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{2x^2 - 8}{x + 2} = -8$.

Demostración. En este caso, consideramos

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{-2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \frac{2x^2-8}{x+2}. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Debemos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, si $0 < |x-(-2)| < \delta$, se verifique la desigualdad

$$\left| \frac{2x^2-8}{x+2} - (-8) \right| < \varepsilon. \tag{9}$$

Observemos que:

$$\left| \frac{2x^2-8}{x+2} - (-8) \right| = 2 \left| \frac{(x+2)^2}{x+2} \right|$$

para todo $x \neq -2$. Además, si suponemos que x toma valores tales que $0 < |x+2|$, la expresión anterior queda en:

$$\left| \frac{2x^2-8}{x+2} - (-8) \right| = 2\,|x+2|\,.$$

Entonces, para que la desigualdad (9) se verifique, es suficiente que

$$2|x+2| < \varepsilon,$$

lo que equivale a

$$|x+2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto, si definimos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2},$$

tenemos que, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, si $0 < |x+2| < \delta$, entonces

$$\left(\frac{2x^2-8}{x+2} - (-8) \right) < \varepsilon.$$

□

EJERCICIO 4. Demostrar que: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(5-x)(2x-1)}{|-5x^2+7x+6|} = +\infty.$

Demostración. En este caso, consideramos

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{2, -\tfrac{3}{5}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \frac{(5-x)(2x-1)}{|-5x^2+7x+6|}. \end{aligned}$$

Sea $R > 0$. Debemos hallar un $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{2, -\frac{3}{5}\}$, si $0 < |x-2| < \delta$, se verifique la desigualdad

$$\frac{(5-x)(2x-1)}{|-5x^2+7x+6|} > R. \tag{10}$$

Observemos que:

$$\frac{(5-x)(2x-1)}{|-5x^2+7x+6|} = \frac{(5-x)(2x-1)}{|x-2||5x+3|} \tag{11}$$

Acabamos de obtener una expresión de la forma $\dfrac{g(x)}{|x-2|}$, con

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{-\tfrac{3}{5}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \frac{(5-x)(2x-1)}{|5x+3|}. \end{aligned}$$

Ahora procedamos a acotar inferiormente g. Para esto, supongamos que x toma valores cercanos a 2; es decir, supongamos que $x \in (2-1, 2+1)$. Entonces obtenemos:

$$1 < x < 3 \tag{12}$$

que equivale a:

$$|x-2| < 1. \tag{13}$$

De (12) se obtiene que:

$$2 < 5-x < 4 \quad , \quad 1 < 2x-1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{18} < \frac{1}{|5x+3|}$$

por lo tanto:

$$\frac{(5-x)(2x-1)}{|5x+3|} > \frac{1}{9},$$

de donde:

$$\frac{(5-x)(2x-1)}{|x-2||5x+3|} > \frac{1}{9|x-2|}.$$

Entonces, para que la desigualdad (10) se verifique es necesario que:

$$|x-2| < 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{9|x-2|} > R,$$

lo que equivale a

$$|x-2| < 1 \quad \text{y} \quad |x-2| < \frac{1}{9R}.$$

Por lo tanto, si definimos

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{1}{9R}\right\},$$

tenemos que, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -\frac{3}{5}\}$, si $0 < |x-2| < \delta$, entonces

$$\frac{(5-x)(2x-1)}{|-5x^2+7x+6|} > R. \qquad \square$$

Ejercicio 5. Demostrar que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0.$

Demostración. En este caso, consideramos

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Debemos hallar un $R < 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^*$, si $x < R$, se verifique la desigualdad

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 0\right| < \varepsilon. \tag{14}$$

Sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}^*$, se tiene

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1;$$

por lo tanto, se verifica

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}$$

para todo $x \neq 0$.

Ahora bien, para que la desigualdad (14) se verifique, es suficiente que $\dfrac{1}{|x|} < \varepsilon$, lo que equivale a $\dfrac{1}{\varepsilon} < |x|$; por lo tanto, para que (14) se verifique, es suficiente que

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{o} \qquad x < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Podemos, entonces, definir

$$R = -\frac{1}{\varepsilon},$$

de donde, para todo $x \in \mathbb{R}^*$, si $x < R$, entonces

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 0\right| < \varepsilon. \qquad \square$$

Comentarios.

1. Para más ejemplos de cómo encontrar el número δ, dado el número ϵ, en la demostración de que un cierto número real es el límite de una función en un punto, véanse los ejemplos 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4 del libro *Cálculo diferencial* de Germán Rojas, Juan Carlos Trujillo y Fabián Barba, editado por la Escuela Politécnica Nacional, desde la página 14 hasta la 28.

$\square$

1. NOTACIÓN SIGMA

DEFINICIÓN 1

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. La **suma desde** k **igual a** 0 **hasta** n **de** a_k, notado por

$$\sum_{k=0}^{n} a_k,$$

se define de manera recursiva de la siguiente forma:

- $\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$; y
- $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}$.

Además, dado $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 < n$, se define

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n_0} a_k.$$

TEOREMA 1

Sean $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Se tiene que

- $\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$;
- $\sum_{k=0}^{n} c a_k = c \sum_{k=0}^{n} a_k$;
- $\sum_{k=0}^{n} c = (n+1)c$.

PROPOSICIÓN 2. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{R}^+$.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

2. SUMA DE RIEMANN

En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

DEFINICIÓN 2

Dado un intervalo $[a, b]$, una **partición del intervalo $[a, b]$ de orden n** es un conjunto

$$P = \{x_k \in \mathbb{R} : k = 0, \ldots, n\},$$

tal que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

- A los conjuntos
$$I_k = [x_{k-1}, x_k],$$
con $k = 1, \ldots, n$, se los llama **subintervalos de la partición**.
- A las cantidades
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$
con $k = 1, \ldots, n$, se las llama la **longitud** del subintervalo I_k.

- A un conjunto

$$C = \{c_k \in I_k : k = 1, \dots, n\}$$

se lo llama un **conjunto de etiquetas** para P.

- A un par (P, C) se lo llama una **partición etiquetada** de $[a, b]$.

- A la cantidad

$$|P| = \max_{k=1,\dots,n} \Delta x_k$$

se la llama **grosor** de la partición.

DEFINICIÓN 3

Sean $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ un función y (P, C) una partición etiquetada de $[a, b]$ de orden n, entonces

$$S(f, P, C) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

es la **suma de Riemann de f respecto a la partición etiquetada** (P, C).

DEFINICIÓN 4

Sean $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ un función e $I \in \mathbb{R}$, se dice que el número I es **la integral de f sobre** $[a, b]$, denotado por

$$I = \int_a^b f(x)\, dx,$$

si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partición P que cumple con $|P| < \delta$ y todo conjunto de etiquetas C de P, se tiene que

$$|S(f, P, C) - I| \leq \epsilon.$$

De existir el número I, se dice que f **es integrable según Riemann**.

PROPOSICIÓN 3. Sea $c \in \mathbb{R}$. La función

$$\begin{aligned} f\colon\ [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto c \end{aligned}$$

es integrable y

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

PROPOSICIÓN 4. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua, entonces f es integrable.

PROPOSICIÓN 5. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es acotada y discontinua en un número finito de puntos, entonces f es integrable.

PROPOSICIÓN 6. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones integrables y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

- $f+g$ es integrable y
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$
- λf es integrable y
$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx;$$
- si $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a,b]$, entonces
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

COROLARIO 7. Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable tal que para todo $x \in [a,b]$, se tiene que

$$f(x) \geq 0,$$

entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

A partir de este punto, consideramos $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $[a, b] \subseteq A$.

DEFINICIÓN 5

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es integrable en $[a, b]$ si $f|_{[a,b]}$ es integrable y se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f|_{[a,b]}(x)\,dx$$

DEFINICIÓN 6

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$. Se define

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

PROPOSICIÓN 8. Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$ y $c \in [a, b]$. Se tiene que f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$, además

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

PROPOSICIÓN 9. Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$, $[a, c]$ y $[c, b]$. Se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3. TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Teorema 10: Teorema del valor medio para funciones integrables

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Se tiene que existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

Definición 7

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se define **el área bajo la gráfica de f entre las rectas de ecuaciones** $x = a$ **y** $x = b$ por el número

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Por tanto, $A \geq 0$.

4. Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema 11: Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Definamos la función

$$\begin{aligned} F\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Se tiene que F es continua en $[a,b]$ y es derivable en $]a,b[$. Además, se verifica que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x),$$

para todo $x \in\ ]a,b[$.

Para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x),$$

para todo $x \in]a, b[$.

1. Función Logaritmo y Exponencial

Definición 1: Función logaritmo

A la función

$$\begin{aligned} \ln\colon \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \end{aligned}$$

se la conoce como función **logaritmo natural**.

Proposición 1. Se tiene que

- $\ln(x) > 0$ para todo $x > 1$;
- $\ln(x) < 0$ para todo $0 < x < 1$;
- $\ln(1) = 0$;

Proposición 2. Se tiene que

- ln es una función continua;
- ln es una función derivable;
- $\dfrac{d}{dx}(\ln(x)) = (\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$;
- ln es estrictamente creciente

Proposición 3. Se tiene que

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ para todo x y todo y en $\mathbb{R}^+$;
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ para todo x y todo y en $\mathbb{R}^+$; y

- $\ln(x^r) = r\ln(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ y todo $r \in \mathbb{Q}$.

PROPOSICIÓN 4. Se tiene que

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty;$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty;$
- ln es biyectiva: inyectiva y sobreyectiva; y
- ln es invertible.

DEFINICIÓN 2

A la función inversa de ln se le representa por exp; es decir, la función

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \ln^{-1}(x) \end{aligned}$$

se la conoce como función **exponencial natural**. Además, se define

$$e = \exp(1).$$

PROPOSICIÓN 5. Se tiene que, para todo $x \in \mathbb{R}^+$

$$\exp(\ln(x)) = x$$

y para todo $y \in \mathbb{R}$

$$\ln(\exp(y)) = y.$$

PROPOSICIÓN 6. Se tiene que

- exp es una función continua;
- exp es una función derivable;

- $\dfrac{d}{dx}(\exp(x)) = (\exp(x))' = \exp(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- exp es estrictamente creciente.

PROPOSICIÓN 7. Se tiene que

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(a + x) = \exp(a)\exp(x)$, para todo $a, x \in \mathbb{R}$;
- $\exp(a - x) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(x)}$, para todo $a, x \in \mathbb{R}$;
- $\exp(rx) = (\exp(x))^r$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{Q}$.

PROPOSICIÓN 8. Se tiene que

$$x^r = \exp(r \ln(x))$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$ y $r \in \mathbb{Q}$.

DEFINICIÓN 3: Exponencial generalizada

Se define

$$x^a = \exp(a \ln(x))$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$ y $a \in \mathbb{R}$.

Con esto, se tiene que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \exp(x).$$

Además,

$$\frac{d}{dx}(e^x) = (e^x)' = e^x.$$

PROPOSICIÓN 9. Se tiene que

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$$

PROPOSICIÓN 10. Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq -1$. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}(x^a) = (x^a)' = ax^{a-1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^*$.

PROPOSICIÓN 11. Sea $a \in \mathbb{R}^+$. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = (a^x)' = a^x \ln(a)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

1. SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Además, tomaremos $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo.

TEOREMA 1: Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $]a,b[$ tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in \,]a,b[$. Se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x),$$

para todo $x \in \,]a,b[$.
Para $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $]a,b[$, se tiene que

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

para todo $x \in \,]a,b[$.

DEFINICIÓN 1: Primitiva

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función, se llama **primitiva** de f a cualquier función $F\colon I \to \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in I$.

Con esto, se tiene que dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Una notación habitual para el lado derecho de la igualdad es la siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

(El punto que aparece al final de la línea es el "punto final" de la oración; no es parte de la representación de $F(b) - F(a)$.

TEOREMA 2

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua, entonces f tiene una primitiva.

PROPOSICIÓN 3. Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $F\colon I \to \mathbb{R}$ una primitiva de f, para todo $c \in \mathbb{R}$, la función

$$\begin{aligned} G\colon\ I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) + c \end{aligned}$$

también es una primitiva de f.

PROPOSICIÓN 4. Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $F, G\colon I \to \mathbb{R}$ dos primitivas de f. Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = G(x) + c$$

para todo $x \in I$.

Definición 2: Antiderivada o Integral Indefinida

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Un representante arbitrario del conjunto de todas las primitivas de la función f es denotado por

$$\int f(x)\,dx,$$

para $x \in I$. A esta función se le denomina **antiderivada** de f o **integral indefinida** de f.

Consideremos la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x, \end{aligned}$$

tenemos que la función

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2, \end{aligned}$$

es una primitiva de f, por lo tanto

$$\int f(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + c$$

para $x \in \mathbb{R}$, con $c \in \mathbb{R}$.

Proposición 5. Sea $a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{R}$ con $n \neq -1$. se tiene que

- $\displaystyle\int 1\,dx = x + c$, para $x \in \mathbb{R}$;
- $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, para $x \in \mathbb{R}$;
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\,dx = \cos(x) + c$, para $x \in \mathbb{R}$;
- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + c$, para $x \in \mathbb{R}$;
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$, para $x \in \mathbb{R}^*$;

- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c$, para $x \in \mathbb{R}$;

con $c \in \mathbb{R}$.

Una tabla mucho más extensa puede ser encontrada en el apéndice del libro de Thomas.

PROPOSICIÓN 6. Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones con primitivas y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

- $f + g$ tiene primitiva y

  $$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

  para $x \in I$;

- λf tiene primitiva y

  $$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx,$$

  para $x \in I$.

2. TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

TEOREMA 7: Cambio de variable

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función con primitiva y $g\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $\operatorname{img}(g) \subseteq I$. Se tiene que

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du,$$

para $x \in I$, donde se toma $u = g(x)$.

Se puede revisar ejemplos de la aplicación de este teorema en el libro de Thomas, pág. 291.

TEOREMA 8: Integración por partes

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones derivables. Se tiene que

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

para $x \in I$.

Se puede revisar ejemplos de la aplicación de este teorema en el libro de Thomas, pág. 450.

2.1 Integrales de productos de potencias de senos y cosenos

Para integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx$$

con $n, m \in \mathbb{N}$, se tienen tres casos.

- Si m es impar, se tiene $m = 2k+1$, con $k \in \mathbb{N}^*$, notamos que

  $$\operatorname{sen}^m(x) = \operatorname{sen}^{2k+1}(x) = (\operatorname{sen}^2(x))^k \operatorname{sen} x = (1-\cos^2(x))^k \operatorname{sen}(x)$$

  y utilizamos el cambio de variable $u = \cos(x)$.

- Si m es par y n es impar, se tiene $n = 2k+1$, con $k \in \mathbb{N}^*$, notamos que

  $$\cos^n(x) = \cos^{2k+1}(x) = (\cos^2(x))^k \cos(x) = (1-\operatorname{sen}^2(x))^k \cos(x)$$

  y utilizamos el cambio de variable $u = \operatorname{sen}(x)$.

- Si m y n son pares, notamos que

  $$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

  y utilizamos uno de los casos anteriores.

Para ejemplos detallados, revisar Thomas, pág. 458.

2.2 Sustitución trigonométrica

Para integrales que involucran términos de la forma

$$\sqrt{a^2+x^2}, \qquad \sqrt{a^2-x^2} \qquad \text{o} \qquad \sqrt{x^2-a^2},$$

con $a \in \mathbb{R}$, se toma el cambio de variable

$$\theta = \arctan\left(\frac{x}{a}\right), \qquad \theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad \text{o} \qquad \theta = \arccos\left(\frac{x}{a}\right),$$

respectivamente, de donde

$$x = a\tan(\theta) \qquad x = a\operatorname{sen}(\theta) \qquad \text{o} \qquad x = a\cos(\theta),$$

respectivamente y

$$a^2+x^2 = a^2\sec^2(\theta), \qquad a^2-x^2 = a^2\cos^2(\theta) \qquad \text{o} \qquad x^2-a^2 = a^2\tan^2(\theta).$$

Para ejemplos detallados, revisar Thomas, pág. 464.

2.3 Funciones racionales

Tenemos que,

- para $a \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + c,$$

  para $x \neq -a$ y con $c \in \mathbb{R}$;

- para $b, c \in \mathbb{R}$, con $b^2-4c<0$, se tiene que

$$\int \frac{x}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2bx+c\right) - \frac{b}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right) + C$$

  para $x \in \mathbb{R}$ con $C \in \mathbb{R}$;

- para $b, c \in \mathbb{R}$, con $b^2-4c<0$, se tiene que

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right) + C$$

para $x \in \mathbb{R}$ con $C \in \mathbb{R}$.

Con esto, y recordando que toda función racional puede ser escrita como combinación lineal de un polinomio y de las funciones antes enlistadas (a este método se lo llama fracciones parciales), se tiene la integral indefinida de cualquier función racional.

EJERCICIO 1. Use el cambio de variable $u = x^2 + a^2$ para calcular

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx.$$

Solución. Con el cambio de variable

$$u = x^2 + a^2, \qquad du = 2x\,dx.$$

Podemos reemplazar estos valores en la integral, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2+a^2}dx &= \int \frac{2x\,dx}{2(x^2+a^2)} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{2}\ln|u| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C,
\end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$. □

EJERCICIO 2. Calcule mediante un cambio de variable $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$.

Solución. Tomemos el cambio de variable

$$x = a\tan(t), \qquad dx = a\sec^2(t)\,dt$$

con $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
x^2 + a^2 &= a^2(\tan^2(t) + 1) \\
&= a^2\sec^2(t),
\end{aligned}$$

con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+a^2} &= \int \frac{a\sec^2(t)}{a^2\sec^2 t}\,dt \\ &= \frac{1}{a}\int dt \\ &= \frac{1}{a}t + C,\end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$. Finalmente, como $t = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$, se tiene:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C. \qquad \square$$

EJERCICIO 3. Use el cambio de variable $u = \sec(x)$ para calcular

$$\int \sec^5(x)\tan^3(x)\,dx.$$

Solución. Notemos que

$$\begin{aligned}\int \sec^5(x)\tan^3(x)\,dx &= \int \sec^4(x)\tan^2(x)(\sec(x)\tan(x))\,dx \\ &= \int \sec^4(x)(\sec^2(x)-1)(\sec(x)\tan(x))\,dx \\ &= \int (\sec^6(x)-\sec^4(x))(\sec(x)\tan(x))\,dx.\end{aligned}$$

Ahora, haciendo el cambio de variable

$$u = \sec(x), \qquad du = \sec(x)\tan(x)\,dx,$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\int (\sec^6(x)-\sec^4(x))(\sec(x)\tan(x))dx &= \int (u^6-u^4)du \\ &= \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{5}u^5 + C,\end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$. Finalmente, regresando a la variable original, tenemos:

$$\int \sec^5(x)\tan^3(x)\,dx = \frac{1}{7}\sec^7(x) - \frac{1}{5}\sec^5(x) + C. \qquad \square$$

EJERCICIO 4. Calcule $\int \operatorname{sen}^5(ax)\cos^5(ax)\,dx$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5(ax)\cos^5(ax)\,dx &= \int \left(\operatorname{sen}^2(ax)\right)^2 \cos^5(ax)\operatorname{sen}(ax)\,dx\\ &= \int \left(1-\cos^2(ax)\right)^2\cos^5(ax)\operatorname{sen}(ax)\,dx\\ &= \int \operatorname{sen}(ax)\left(\cos^5(ax)-2\cos^7(ax)+\cos^9(ax)\right)\,dx,\end{aligned}$$

Ahora, tomando el cambio de variable:

$$u=\cos(ax), \qquad du=-a\operatorname{sen}(ax)\,dx,$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5(ax)\cos^5(ax)\,dx &= -\frac{1}{a}\int -a\operatorname{sen}(ax)\left(\cos^5(ax)-2\cos^7(ax)+\cos^9(ax)\right)\,dx\\ &= -\frac{1}{a}\int \left(u^5-2u^7+u^9\right)\,du\\ &= -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{6}u^6-\frac{1}{4}u^8+\frac{1}{10}u^{10}\right)+C.\end{aligned}$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen}^5(ax)\cos^5(ax)\,dx = -\frac{1}{6a}\cos^6(ax)+\frac{1}{4a}\cos^8(ax)-\frac{1}{10a}\cos^{10}(ax)+C,$$

con $C\in\mathbb{R}$. □

EJERCICIO 5. Calcule mediante integración por partes $\int \ln(3x+2)\,dx$.

Solución. Usemos integración por partes tomando

$$u=\ln(3x+2), \qquad du=\frac{3}{3x+2}\,dx,$$

y

$$v=x, \quad dv=dx,$$

entonces

$$\int \ln(3x+2)\,dx = x\ln(3x+2) - \int \frac{3x}{3x+2}\,dx.$$

Para resolver la integral del lado derecho consideramos un nuevo cambio de variable:

$$w = 3x+2, \quad dw = 3\,dx, \quad x = \frac{w-2}{3},$$

con lo que

$$\begin{aligned}\int \frac{3x}{3x+2}\,dx &= \int \frac{w-2}{3w}\,dw \\ &= \frac{1}{3}\int dw - \frac{1}{3}\int \frac{2}{w}\,dw \\ &= \frac{1}{3}w - \frac{2}{3}\ln|w| + C,\end{aligned}$$

donde $C \in \mathbb{R}$.Luego,

$$\int \ln(3x+2)\,dx = x\ln(3x+2) - \frac{3x+2}{3} + \frac{2}{3}\ln|3x+2| + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$. □

EJERCICIO 6. Calcule mediante integración por partes $\int \arctan(x)\,dx$.

Solución. Tomando

$$u = x, \quad du = dx,$$

y

$$v = \arctan(x), \quad dv = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Integrando por partes tenemos

$$\int \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

Calculemos la integral del lado derecho considerando el nuevo cambio de variable

$$w = x^2+1, \qquad dw = 2x\,dx, \qquad x = \sqrt{w-1},$$

y obtenemos:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dw}{2\sqrt{w}} = \sqrt{w} + C.$$

con $C \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\int \arctan(x)\, dx = x \arctan(x) - \sqrt{x^2+1} + C. \qquad \square$$

EJERCICIO 7. Calcule mediante integración por partes

$$\int \exp(ax)\operatorname{sen}(bx)\, dx.$$

Solución. Para usar integración por partes, tomamos

$$u = \operatorname{sen}(bx), \quad du = b\cos(bx)\, dx,$$

y

$$v = \frac{1}{a}\exp(ax), \quad dv = \exp(ax)\, dx,$$

tenemos que

$$\int \exp(ax)\operatorname{sen}(bx)\, dx = \frac{\exp(ax)\operatorname{sen}(bx)}{a} - \frac{b}{a}\int \exp(ax)\cos(bx)\, dx$$

Nuevamente, utilizando integración por partes, tomamos

$$u = \cos(bx), \quad du = -b\operatorname{sen}(bx)\, dx,$$

y

$$v = \frac{1}{a}\exp(ax), \quad dv = \exp(ax)\, dx.$$

tenemos

$$\begin{aligned}\int \exp(ax)\operatorname{sen}(bx)\, dx &= \frac{\exp(ax)\operatorname{sen}(bx)}{a} \\ &\quad - \frac{b}{a}\left[\frac{\exp(ax)\cos(bx)}{a} + \frac{b}{a}\int \exp(ax)\operatorname{sen}(bx)\, dx\right] \\ &= \frac{\exp(ax)}{a}\left(\operatorname{sen}(bx) - \frac{b}{a}\cos(bx)\right)\end{aligned}$$

$$-\frac{b^2}{a^2}\int \exp(ax)\operatorname{sen}(bx)\,dx.$$

De donde

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int \exp(ax)\operatorname{sen}(bx)\,dx = \frac{\exp(ax)}{a}\left(\operatorname{sen}(bx)-\frac{b}{a}\cos(bx)\right).$$

Con lo que, finalmente obtenemos

$$\int \operatorname{sen}(bx)\exp(ax)\,dx = \frac{a\exp(ax)}{a^2+b^2}\left(\operatorname{sen}(bx)-\frac{b}{a}\cos(bx)\right)+C,$$

con $C \in \mathbb{R}$. $\square$

EJERCICIO 8. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-27x}$.

Solución. Comencemos factorando el denominador, de manera que obtenemos

$$\int \frac{dx}{x^4-27x} = \int \frac{dx}{x(x-3)(x^2+3x+9)}.$$

y descompongamos la fracción en fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x(x-3)(x^2+3x+9)} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{Cx+D}{x^2+3x+9}\\
&= \frac{A(x-3)(x^2+3x+9)+Bx(x^2+3x+9)}{x(x-3)(x^2+3x+9)}\\
&\quad+\frac{x(Cx+D)(x-3)}{x(x-3)(x^2+3x+9)}\\
&= \frac{(A+B+C)x^3+(3B+D-3C)x^2}{x(x-3)(x^2+3x+9)}\\
&\quad+\frac{(9B-3D)x-27A}{x(x-3)(x^2+3x+9)}.
\end{aligned}$$

Con lo que, igualando los coeficientes, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 0 = A + B + C \\ 0 = 3B + D - 3C \\ 0 = 9B - 3D \\ 1 = -27A. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, se obtiene:

$$A = -\frac{1}{27}, \quad B = \frac{1}{81}, \quad C = \frac{2}{81}, \quad \text{y} \quad D = \frac{1}{27}.$$

Luego,

$$\frac{1}{x(x-3)(x^2+3x+9)} = -\frac{1}{27x} + \frac{1}{81(x-3)} + \frac{2x+3}{81(x^2+3x+9)},$$

de manera que

$$\int \frac{dx}{x(x-3)(x^2+3x+9)} = -\frac{1}{27}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{81}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{81}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+9}\,dx.$$

Las dos primeras integrales del lado derecho son fáciles de resolver. Para la solución de la tercera, tomamos en cuenta el cambio de variable

$$u = x^2 + 3x + 9, \quad du = (2x+3)du.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x^2+3x+9}dx &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln|u| + K_0 \\ &= \ln|x^2+3x+9| + K_0, \end{aligned}$$

donde $K_0 \in \mathbb{R}$. Con esto, tenemos finalmente que

$$\int \frac{dx}{x^4 - 27x} = -\frac{1}{27}\ln|x| + \frac{1}{81}\ln|x-3| + \frac{1}{81}\ln|x^2+3x+9| + K,$$

con $K \in \mathbb{R}$. □

1. INTEGRALES DEFINIDAS

EJERCICIO 1. Calcular $\displaystyle\int_0^a \frac{x}{x^2+a^2}\,dx$, donde $a>0$.

Solución. Tenemos que

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{x}{x^2+a}\,dx &= \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2|\Big|_0^a \\ &= \frac{1}{2}\ln|a^2+a^2| - \frac{1}{2}\ln|0^2+a^2| \\ &= \frac{1}{2}\ln(2).\end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 1. Sean $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ funciones derivables. Se tiene que

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

para $x\in I$.

EJERCICIO 2. Calcular $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(x)\,dx$.

Solución. Tomando

$$u = x, \qquad du = dx$$

y

$$v = \operatorname{sen}(x) \qquad dv = \cos(x)\,dx$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx &= x\operatorname{sen}(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx \\ &= \pi\operatorname{sen}(\pi) - 0\operatorname{sen}(0) + \cos(x)\Big|_0^{\pi} \\ &= \cos(\pi) - \cos(0) \\ &= -2.\end{aligned}$$

□

TEOREMA 2: Cambio de variable

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función con primitiva y $g\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $\operatorname{img}(g) \subseteq I$. Se tiene que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

EJERCICIO 3. Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$.

Solución. Tomemos el cambio de variable

$$u = x^3 + 1, \qquad du = 3x^2\,dx$$

con lo cual se tiene

x	u
-1	0
1	2

con esto

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx &= \int_0^2 \sqrt{u}\,du \\ &= \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}(2)^{3/2} - \frac{2}{3}(0)^{3/2} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

2. Aplicaciones

En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y una partición P regular de grosor $\Delta x > 0$ y de orden n, con etiquetado C.

Proposición 3. Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas, se tiene que el área delimitada por la gráfica de las funciones f y g entre las rectas de ecuación $x = a$ y $x = b$ puede ser aproximada por

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} |f(c_k) - g(c_k)| \Delta x,$$

por lo tanto

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(c_k) - g(c_k)| \Delta x = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Se pueden tener ejemplos del cálculo de área entre curvas en la página 379 del libro de Thomas.

Proposición 4. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable, se tiene que la longitud de arco de la gráfica de la función f, denotado por $L(f)$, se puede aproximar por

$$
\begin{aligned}
L(f) &\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x_{k-1}) - f(x_k))^2} \\
&\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{\Delta x}\right)^2} \Delta x,
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} L(f) &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{\Delta x} \right)^2} \Delta x \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \end{aligned}$$

Se pueden tener ejemplos del cálculo de longitud de arco entre curvas en la página 420 del libro de Thomas.

1. VOLÚMENES POR SECCIONES TRANSVERSALES

En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y una partición P regular de grosor $\Delta x > 0$ y de orden n, con etiquetado C.

TEOREMA 1: Sección transversal

Supongamos que $A\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, una función continua, modela el área de la sección transversal de un sólido. Se tiene que el volumen del sólido puede ser aproximada por

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} A(c_k)\Delta x,$$

por lo tanto

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} A(c_k)\Delta x = \int_a^b A(x)\, dx.$$

Se pueden encontrar ejemplos del cálculo de volúmenes por secciones transversales a partir de la página 396 del libro de Thomas. Además se pueden visualizar algunos ejemplos de estos sólidos en

- `https://www.geogebra.org/m/nVnKDrvy` o
- `https://www.geogebra.org/m/RFHTZ4kt`.

EJERCICIO 1. Calcular el volumen de un cono de radio R y altura H.

EJERCICIO 2. Calcular el volumen de una pirámide cuadrada de lado de la base L y altura H.

2. Volúmenes de revolución

En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y una partición P regular de grosor $\Delta x > 0$ y de orden n, con etiquetado C.

Además, dados un eje cualquiera y una función continua $R\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sobre este eje, consideraremos el sólido que resulta al revolucionar el área entre la gráfica de la función R y el eje, al rededor de dicho eje.

Teorema 2: Método de los discos

Se tiene que el volumen del sólido de revolución se puede aproximar por

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \pi(R(c_k))^2 \Delta x,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi(R(c_k))^2 \Delta x \\ &= \int_a^b \pi(R(x))^2 \, dx. \end{aligned}$$

Se pueden encontrar ejemplos del cálculo de volúmenes de revolución, por el método de discos, a partir de la página 399 del libro de Thomas. Además se pueden visualizar algunos ejemplos de estos sólidos en

- `https://www.geogebra.org/m/vjmke8bn` o
- `https://www.geogebra.org/m/hhRJQyz9`.

Ejercicio 3. Calcular, utilizando el método de discos, el volumen de un cono de radio R y altura H.

Ejercicio 4. Calcular, utilizando el método de discos, el volumen de una esfera de radio R.

Ahora, dados un eje cualquiera y dos funciones continuas $R_1, R_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sobre este eje, consideraremos el sólido que resulta al revolucionar el área entre la gráfica de las funciones R_1 y R_2, al rededor de dicho eje.

TEOREMA 3: Método de las arandelas

Se tiene que el volumen del sólido de revolución se puede aproximar por

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \pi |(R_1(c_k))^2 - (R_2(c_k))^2| \Delta x,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi |(R_1(c_k))^2 - (R_2(c_k))^2| \Delta x \\ &= \int_a^b \pi |(R_1(x))^2 - (R_2(x))^2| \, dx. \end{aligned}$$

EJERCICIO 5. Calcular, utilizando el método de arandelas, el volumen de un tronco de cono radio mayor R, radio menor r y altura h.

Ahora, dados un eje cualquiera y una función continua $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sobre este eje, consideraremos el sólido que resulta al revolucionar el área entre la gráfica de la función h y el eje, alrededor del eje perpendicular a dicho eje.

TEOREMA 4: Capas Cilíndricas

Se tiene que el volumen del sólido de revolución se puede aproximar por

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi c_k h(c_k) \Delta x,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi c_k h(c_k) \Delta x \\ &= \int_a^b \pi x h(x) \, dx. \end{aligned}$$

Se pueden encontrar ejemplos del cálculo de volúmenes de revolución, por el método de discos, a partir de la página 409 del libro de Thomas.

EJERCICIO 6. Calcular, utilizando el método de capas cilíndricas, el volumen de una esfera de radio R.

3. SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y una partición P regular de grosor $\Delta x > 0$ y de orden n, con etiquetado C.

Además, dados un eje cualquiera y una función continua $R\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sobre este eje, consideraremos la superficie que resulta al revolucionar la gráfica la función R, al rededor de dicho eje.

TEOREMA 5: Superficie de revolución

Se tiene que el área del sólido de revolución se puede aproximar por

$$\begin{aligned} S &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x_{k-1}) - f(x_k))^2} \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k)) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{\Delta x}\right)^2} \Delta x, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\Delta x \to 0} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k)) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \\ &= \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \end{aligned}$$

Se pueden encontrar ejemplos del cálculo de áreas de revolución, por el método de discos, a partir de la página 436 del libro de Thomas.

4. MOMENTO, MASA Y CENTRO DE MASA

En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y una partición P regular de grosor $\Delta x > 0$ y de orden n, con etiquetado C.

Suponga que se tiene una barra que reposa sobre el eje x. Además, considere que $\delta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, una función continua, modela la densidad de esta barra.

TEOREMA 6: Momento

Se tiene que el momento de la barra se puede aproximar por

$$M_0 \approx \sum_{k=1}^{n} c_k \delta(c_k) \Delta x,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} M_0 &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k \delta(c_k) \Delta x \\ &= \int_a^b x\delta(x)\, dx. \end{aligned}$$

TEOREMA 7: Masa

Se tiene que la masa de la barra se puede aproximar por

$$M \approx \sum_{k=1}^{n} \delta(c_k) \Delta x,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \delta(c_k) \Delta x \\ &= \int_a^b \delta(x)\, dx. \end{aligned}$$

TEOREMA 8: Centro de masa

Se tiene el centro de masas de la barra está ubicado en

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\displaystyle\int_a^b x\delta(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b \delta(x)\, dx}.$$

1. ÁREA ENTRE CURVAS

EJERCICIO 1. Considere las funciones

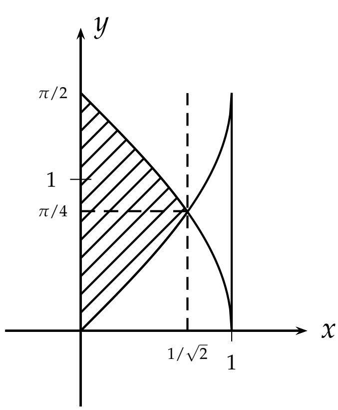
$$f\colon \begin{array}{ccl}[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{arc\,sen}(x)\end{array} \quad \text{y} \quad g\colon \begin{array}{ccl}[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arccos(x).\end{array}$$

Sea S la región comprendida entre las gráficas de las funciones f y g y entre las rectas de ecuación $x = 0$ y $x = 1/\sqrt{2}$.

1. Elabore un boceto de la región S.
2. Plantee dos integrales que calculen el área de la región S. Luego elija la integral más simple de calcular.
3. Calcule el valor del área.

Solución.

1. La región es:



2. Al utilizar una partición en el eje x, se tiene que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{1/\sqrt{2}} |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} |\operatorname{arc\,sen}(x) - \arccos(x)| dx \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \arccos(x) - \operatorname{arc\,sen}(x) dx. \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que f y g tienen inversa, al realizar una partición en el eje y, se tiene que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(y) dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(y) dy \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(y) dy, \end{aligned}$$

donde se utilizó la simetría de la región. Es claro que la segunda integral es más simple de calcular.

3. Utilizando el segundo Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(y) dy = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, el área pedida es

$$A = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59.$$

$\square$

2. Volúmenes por secciones transversales

Ejercicio 2. La base de un sólido está delimitada por las funciones

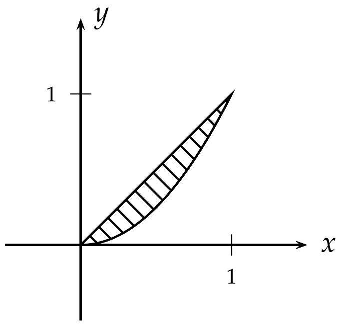
$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2, \end{aligned}$$

además, sus secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados. Se desea calcular el volumen de este sólido, para esto, siga el siguiente proceso:

1. Elabore un boceto de la base del sólido.
2. Plantee la función de área de la sección transversal perpendicular al eje x.
3. Plantee una integral que calcule el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que la longitud de la base de la sección transversal a la altura $x \in [0, 1]$ es

$$f(x) - g(x) = x - x^2$$

y la base de la sección transversal es la base del cuadrado, tenemos que su área está dada por

$$A(x) = (f(x) - g(x))^2 = (x - x^2)^2.$$

3. Si llamamos V al volumen del sólido, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)dx \\ &= \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)^2 dx. \qquad \square$$

EJERCICIO 3. La base de un sólido está delimitada por las funciones

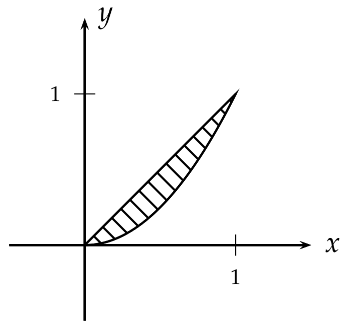
$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2, \end{aligned}$$

además, sus secciones transversales perpendiculares al eje x son semicírculos. Se desea calcular el volumen de este sólido, para esto, siga el siguiente proceso:

1. Elabore un boceto de la base del sólido.
2. Plantee la función de área de la sección transversal perpendicular al eje x.
3. Plantee una integral que calcule el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que la longitud de la base de la sección transversal a la altura $x \in [0,1]$ es
$$f(x) - g(x) = x - x^2$$
y la base de la sección transversal es el diámetro del semicírculo, tene-

mos que su área está dada por

$$A(x) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{f(x)-g(x)}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x-x^2}{2}\right)^2.$$

3. Si llamamos V al volumen del sólido, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{2}\left(\frac{f(x)-g(x)}{2}\right)^2 dx \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{2}\left(\frac{x-x^2}{2}\right)^2 dx. \end{aligned}$$

□

3. Volúmenes de revolución

Ejercicio 4. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

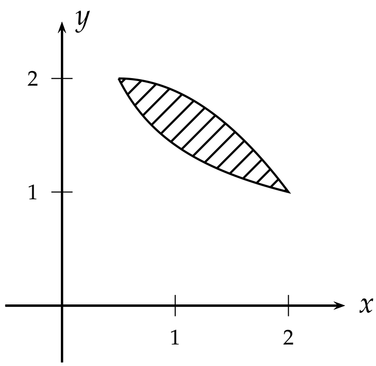
$$xy^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 9y = 17 + 4x - 4x^2,$$

y entre las rectas de ecuación $x = 1/2$ y $x = 2$, en el primer cuadrante.

1. Elabore un boceto de la región.
2. Mediante una partición en el eje x, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje x.
3. En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que realizaremos la partición en el eje x, consideremos las funciones

$$f\colon [1/2, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g\colon [1/2,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{\frac{2}{x}} \qquad \text{y} \qquad x \longmapsto \frac{17+4x-4x^2}{9}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme de grosor Δx, se genera una arandela de radio mayor $g(x_k)$, radio menor $f(x_k)$ y espesor Δx, por lo tanto tenemos que el volumen puede ser aproximado por

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left((g(x_k))^2 - (f(x_k))^2\right) \Delta x \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left(\left(\frac{17 + 4x_k - 4x_k^2}{9}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{x_k}}\right)^2\right) \Delta x. \end{aligned}$$

3. Del literal anterior, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_{1/2}^{2} \pi \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right) dx \\ &= \int_{1/2}^{2} \pi \left(\left(\frac{17 + 4x - 4x^2}{9}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)^2\right) dx. \qquad \square \end{aligned}$$

Ejercicio 5. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

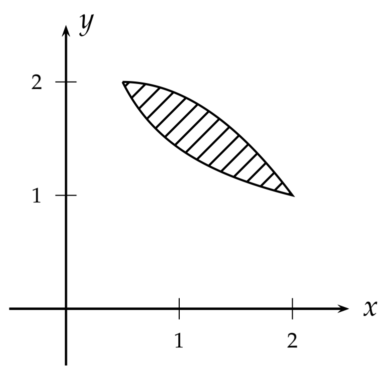
$$xy^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 9y = 17 + 4x - 4x^2,$$

y entre las rectas de ecuación $x = 1/2$ y $x = 2$, en el primer cuadrante.

1. Elabore un boceto de la región.
2. Mediante una partición en el eje x, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje y.
3. En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que realizaremos la partición en el eje x, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [1/2,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\frac{2}{x}} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [1/2,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{17+4x-4x^2}{9} \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme de grosor Δx, se genera una capa cilíndrica de radio x_k, altura $g(x_k) - f(x_k)$ y espesor Δx, por lo tanto tenemos que el volumen puede

ser aproximado por

$$
\begin{aligned}
V &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k \left(g(x_k) - f(x_k)\right) \Delta x \\
&\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k \left(\frac{17 + 4x_k - 4x_k^2}{9} - \sqrt{\frac{2}{x_k}} \right) \Delta x.
\end{aligned}
$$

3. Del literal anterior, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{1/2}^{2} 2\pi x \left(g(x) - f(x)\right) dx \\
&= \int_{1/2}^{2} 2\pi x \left(\frac{17 + 4x - 4x^2}{9} - \sqrt{\frac{2}{x}} \right) dx. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Ejercicio 6. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

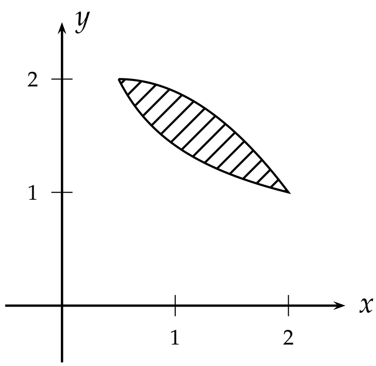
$$xy^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 9y = 17 + 4x - 4x^2,$$

y entre las rectas de ecuación $x = 1/2$ y $x = 2$, en el primer cuadrante.

1. Elabore un boceto de la región.
2. Mediante una partición en el eje y, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje x.
3. En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que realizaremos la partición en el eje y, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{2}{y^2} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2-y}) \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme de grosor Δy, se genera una capa cilíndrica de radio y_k, altura $g(y_k) - f(y_k)$ y espesor Δy, por lo tanto tenemos que el volumen puede

ser aproximado por

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi y_k \left(g(y_k) - f(y_k)\right) \Delta y \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi y_k \left(\frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2 - y_k}) - \frac{2}{y_k^2}\right) \Delta y. \end{aligned}$$

3. Del literal anterior, tomando el límite cuando Δy tiende a 0, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 2\pi y \left(g(y) - f(y)\right) dy \\ &= \int_1^2 2\pi y \left(\frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2 - y}) - \frac{2}{y^2}\right) dx. \end{aligned}$$ $\square$

EJERCICIO 7. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

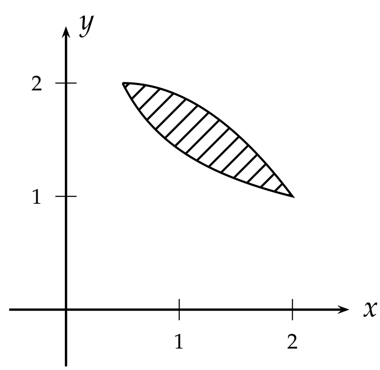
$$xy^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 9y = 17 + 4x - 4x^2,$$

y entre las rectas de ecuación $x = 1/2$ y $x = 2$, en el primer cuadrante.

1. Elabore un boceto de la región.
2. Mediante una partición en el eje y, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje y.
3. En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que realizaremos la partición en el eje y, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{2}{y^2} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2-y}) \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme de grosor Δy, se genera una arandela de radio mayor $g(y_k)$, radio menor $f(y_k)$ y espesor Δy, por lo tanto tenemos que el volumen puede

ser aproximado por

$$\begin{aligned}
V &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left((g(y_k))^2 - (f(y_k))^2\right) \Delta y \\
&\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left(\left(\frac{1}{2}(1+3\sqrt{2-y_k})\right)^2 - \left(\frac{2}{y_k^2}\right)^2\right) \Delta y.
\end{aligned}$$

3. Del literal anterior, tomando el límite cuando Δy tiende a 0, tenemos que

$$\begin{aligned}
V &= \int_1^2 \pi \left((g(y))^2 - (f(y))^2\right) dy \\
&= \int_1^2 \pi \left(\left(\frac{1}{2}(1+3\sqrt{2-y})\right)^2 - \left(\frac{2}{y^2}\right)^2\right) dx. \qquad \square
\end{aligned}$$

EJERCICIO 8. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

$$xy^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 9y = 17 + 4x - 4x^2,$$

y entre las rectas de ecuación $x = 1/2$ y $x = 2$, en el primer cuadrante.

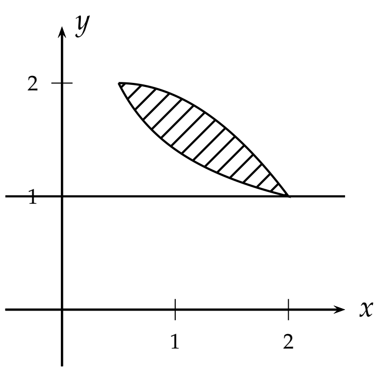
1. Elabore un boceto de la región.

2. Mediante una partición en el eje y, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje de ecuación $y = 1$.

3. En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que realizaremos la partición en el eje y, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{2}{y^2} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2-y}) \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme de grosor Δy, se genera una capa cilíndrica de radio $y_k - 1$, altura $g(y_k) - f(y_k)$ y espesor Δy, por lo tanto tenemos que el volumen puede

ser aproximado por

$$
\begin{aligned}
V &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi(y_k - 1)\left(g(y_k) - f(y_k)\right)\Delta y \\
&\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi(y_k - 1)\left(\frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2 - y_k}) - \frac{2}{y_k^2}\right)\Delta y.
\end{aligned}
$$

3. Del literal anterior, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^2 2\pi(y - 1)\left(g(y) - f(y)\right)dy \\
&= \int_1^2 2\pi(y - 1)\left(\frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2 - y}) - \frac{2}{y^2}\right)dx. \qquad \square
\end{aligned}
$$

EJERCICIO 9. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

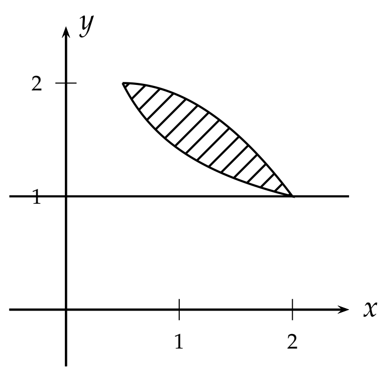
$$xy^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 9y = 17 + 4x - 4x^2,$$

y entre las rectas de ecuación $x = 1/2$ y $x = 2$, en el primer cuadrante.

1. Elabore un boceto de la región.
2. Mediante una partición en el eje x, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje de ecuación $y = 1$.
3. En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que realizaremos la partición en el eje x, consideremos las funciones

$$f\colon [1/2, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \sqrt{\frac{2}{x}} \qquad \text{y} \qquad g\colon [1/2, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \frac{17 + 4x - 4x^2}{9}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme de grosor Δx, se genera una arandela de radio mayor $g(x_k) - 1$, radio menor $f(x_k) - 1$ y espesor Δx, por lo tanto tenemos que el volumen puede ser aproximado por

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left((g(x_k) - 1)^2 - (f(x_k) - 1)^2 \right) \Delta x \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left(\left(\frac{17 + 4x_k - 4x_k^2}{9} - 1 \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{x_k}} - 1 \right)^2 \right) \Delta x. \end{aligned}$$

3. Del literal anterior, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_{1/2}^{2} \pi \left((f(x) - 1)^2 - (g(x) - 1)^2 \right) dx \\ &= \int_{1/2}^{2} \pi \left(\left(\frac{17 + 4x - 4x^2}{9} - 1 \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{x}} - 1 \right)^2 \right) dx. \qquad \square \end{aligned}$$

EJERCICIO 10. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

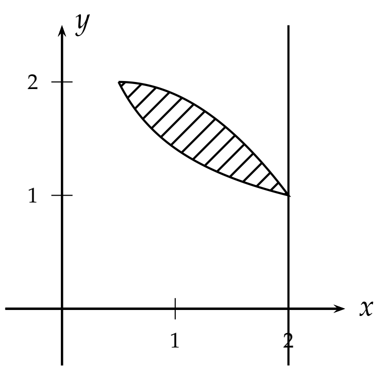
$$xy^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 9y = 17 + 4x - 4x^2,$$

y entre las rectas de ecuación $x = 1/2$ y $x = 2$, en el primer cuadrante.

1. Elabore un boceto de la región.
2. Mediante una partición en el eje x, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje de ecuación $x = 2$.
3. En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que realizaremos la partición en el eje x, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [1/2,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\frac{2}{x}} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [1/2,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{17+4x-4x^2}{9} \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme de grosor Δx, se genera una capa cilíndrica de radio $2 - x_k$, altura $g(x_k) - f(x_k)$ y espesor Δx, por lo tanto tenemos que el volumen puede

ser aproximado por

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi(2-x_k)\left(g(x_k)-f(x_k)\right)\Delta x \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi(2-x_k)\left(\frac{17+4x_k-4x_k^2}{9}-\sqrt{\frac{2}{x_k}}\right)\Delta x. \end{aligned}$$

3. Del literal anterior, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_{1/2}^{2} 2\pi(2-x)\left(g(x)-f(x)\right)dx \\ &= \int_{1/2}^{2} 2\pi(2-x)\left(\frac{17+4x-4x^2}{9}-\sqrt{\frac{2}{x}}\right)dx. \end{aligned}$$ □

EJERCICIO 11. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

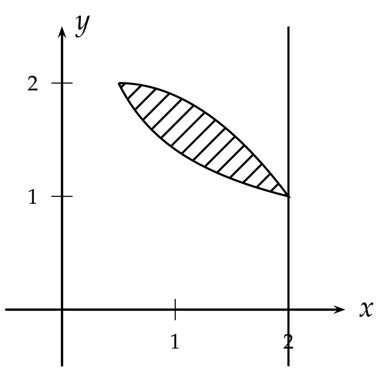
$$xy^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad 9y = 17 + 4x - 4x^2,$$

y entre las rectas de ecuación $x = 1/2$ y $x = 2$, en el primer cuadrante.

1. Elabore un boceto de la región.
2. Mediante una partición en el eje y, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje de ecuación $x = 2$.
3. En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

1. La región es:



2. Dado que realizaremos la partición en el eje y, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{2}{y^2} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [1,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2-y}) \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme de grosor Δy, se genera una arandela de radio mayor $2 - f(y_k)$, radio menor $2 - g(y_k)$ y espesor Δy, por lo tanto tenemos que el volumen puede ser aproximado por

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left((2 - g(y_k))^2 - (2 - f(y_k))^2 \right) \Delta y \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left(\left(2 - \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2 - y_k}) \right)^2 - \left(2 - \frac{2}{y_k^2} \right)^2 \right) \Delta y. \end{aligned}$$

3. Del literal anterior, tomando el límite cuando Δy tiende a 0, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \pi \left((2 - g(y))^2 - (2 - f(y))^2 \right) dy \\ &= \int_1^2 \pi \left(\left(2 - \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{2 - y}) \right)^2 - \left(2 - \frac{2}{y^2} \right)^2 \right) dx. \qquad \square \end{aligned}$$