ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
MATEMÁTICA ARQUITECTURA • EXAMEN NO. 01

Semestre 2019-1

1. Considere el lugar geométrico de ecuación $x^2(y+1) = 4$. (1.5pt)

   a) Determine si el punto $A = (2, 0)$ pertenece al lugar geométrico.

   b) Determine si el punto $B = (0, -2)$ pertenece al lugar geométrico.

   c) Determine otro punto, distinto a los dos anteriores, que sea parte del lugar geométrico.

Solución.

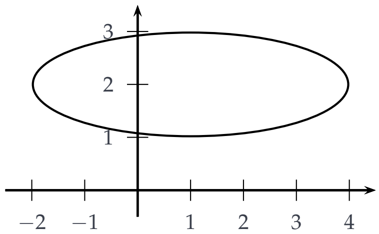
a) Notemos que
$$(2)^2(0+1) = 4,$$
por lo tanto, A pertenece al lugar geométrico.

b) Notemos que
$$(0)^2((-2)+1) = 0 \neq 4,$$
por lo tanto, B no pertenece al lugar geométrico.

c) Tomemos $x = 1$, necesitamos que
$$(1)^2(y+1) = 4,$$
de donde, obtenemos que $y = 3$, por lo tanto, el punto $(1, 3)$ pertenece al lugar geométrico.

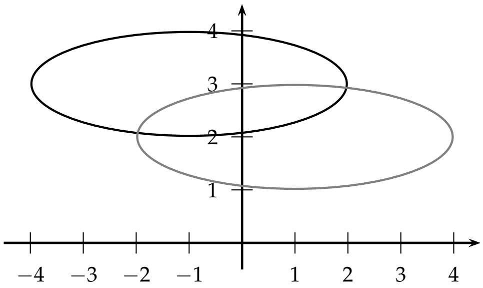
$\square$

2. El lugar geométrico de ecuación
$$x^2 - 2x + 9y^2 - 36y + 28 = 0$$
se lo muestra en la siguiente gráfica:



Determinar la ecuación de la gráfica trasladada -2 unidades en el eje x y 1 unidades en el eje y, además, graficarla aproximadamente. (2pt)

Solución. Para esto, debemos realizar la transformación
$$(x, y) \mapsto (x+2, y-1)$$
en la ecuación, así, obtenemos la nueva ecuación:
$$(x+2)^2 - 2(x+2) + 9(y-1)^2 - 36(y-1) + 28 = 0$$
que equivale a
$$x^2 + 9y^2 + 2x - 54y + 73 = 0$$
y su gráfica es



□

3. Se quiere encontrar la reflexión del punto $C = (-1, 5)$ mediante la recta ℓ de ecuación $3x - 2y = 0$. Para esto, realice el siguiente procedimiento:

   a) Determine la distancia entre la recta ℓ y el punto C.

   b) Determine la recta perpendicular a ℓ que pase por el punto C, llame a esta ℓ_p.

   c) Determine un punto B que esté sobre la recta ℓ_p de tal forma que la distancia de C a ℓ sea igual que la distancia de ℓ a B.

   Este punto B es la reflexión del punto C mediante la recta ℓ. (2.5pt)

Solución.

a) La distancia entre el punto C y la recta ℓ es

$$\frac{|3(-1) - 2(5) + 0|}{\sqrt{(3)^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}}.$$

b) Supongamos que la ecuación de la recta ℓ_p es

$$y = mx + b,$$

(utilizo esta ecuación dado que las condiciones indicadas en el ejercicios tienen que ver con perpendicularidad y por lo tanto, con la pendiente). Debemos determinar los valores de m y de b.

Dado que ℓ y ℓ_p deben ser perpendiculares, primero debo hallar la pendiente de ℓ para ello, despejo y de la ecuación de la recta ℓ y obtengo

$$y = \frac{3}{2}x,$$

con esto, se tiene que la pendiente de ℓ es $m_\ell = \frac{3}{2}$. Ahora, aplicando condiciones de perpendicularidad, tenemos que

$$m_\ell \cdot m = -1,$$

por lo tanto

$$\frac{3}{2} \cdot m = -1$$

de donde

$$m = -\frac{2}{3}$$

y por lo tanto, la ecuación de ℓ_p es

$$y = -\frac{2}{3}x + b.$$

Ahora, para determinar b, analizo la otra condición para la recta ℓ_p, es decir, debe pasar por el punto $(-1, 5)$, por lo tanto, este punto debe cumplir la ecuación de la recta ℓ_p, por lo tanto

$$(5) = -\frac{2}{3}(-1) + b$$

de donde

$$b = \frac{13}{3}.$$

Así, la ecuación de ℓ_p es

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$

c) Tomemos $B = (u, v)$, debemos determinar los valores de u y v. Dado que B está sobre la recta ℓ_p, el punto B debe cumplir su ecuación, por lo tanto

$$(v) = -\frac{2}{3}(u) + \frac{13}{3}. \tag{1}$$

Ahora, necesitamos que la distancia del punto B a la recta ℓ sea igual a la distancia del punto C a la recta ℓ. Como la distancia del punto C a la recta ℓ es

$$\frac{13}{\sqrt{13}}$$

y la distancia del punto B a la recta ℓ es

$$\frac{|3(u) - 2(v) + 0|}{\sqrt{(3)^2 + (-2)^2}} = \frac{|3u - 2v|}{\sqrt{13}},$$

igualamos estos dos valores y obtenemos

$$\frac{|3u - 2v|}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}}. \tag{2}$$

Por lo tanto, debemos resolver las ecuaciones (1) y (2). Para esto, reemplacemos (1) en (2):

$$\frac{\left|3u - 2\left(-\frac{2}{3}(u) + \frac{13}{3}\right)\right|}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}},$$

resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{\left|3u - 2\left(-\frac{2}{3}u + \frac{13}{3}\right)\right|}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}} &\Longrightarrow \left|\frac{13}{3}u - \frac{26}{3}\right| = 13 \\
&\Longrightarrow \left(\frac{13}{3}u - \frac{26}{3}\right)^2 = 169 \\
&\Longrightarrow u^2 - 4u - 5 = 0 \\
&\Longrightarrow (u+1)(u-5) = 0 \\
&\Longrightarrow (u = -1 \qquad \text{o} \qquad u = 5)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, reemplazando en (1):

$$v = 5 \qquad \text{o} \qquad v = 1.$$

Así, los puntos que cumplen esto son

$$(-1, 5) \qquad \text{y} \qquad (5, 1).$$

Como el primer punto es el original, tomamos el segundo, es decir, el punto B es $(5, 1)$. □

4. Dado un sistema coordenado en un lago con tres muelles, se tiene que los muelles están en las coordenadas $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(4, 2)$. Se desea colocar una isla artificial que esté a la misma distancia de los tres muelles, esto equivale a encontrar el centro de la circunferencia que pasa por los tres puntos. Determinar las coordenadas donde se debe colocar la isla. (3pt)

Solución. Consideremos la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

donde D, E, F son valores que vamos a determinar. Dado que la circunferencia pasa por los tres puntos, se tiene que

- Para el punto $(0,0)$, se debe cumplir que
$$(0)^2 + (0)^2 + D(0) + E(0) + F = 0$$
lo que equivale a
$$F = 0 \tag{3}$$
- Para el punto $(4,0)$, se debe cumplir que
$$(4)^2 + (0)^2 + D(4) + E(0) + F = 0$$
lo que equivale a
$$16 + 4D + F = 0 \tag{4}$$
- Para el punto $(4,2)$, se debe cumplir que
$$(4)^2 + (2)^2 + D(4) + E(2) + F = 0$$
lo que equivale a
$$20 + 4D + 2E + F = 0 \tag{5}$$

Así, resolvemos el sistema dado por (3), (4) y (5):
$$\begin{cases} F = 0 \\ 16 + 4D + F = 0 \\ 20 + 4D + 2E + F = 0. \end{cases}$$
Con esto, tenemos que
$$D = -4, \qquad E = -2 \qquad \text{y} \qquad F = 0.$$
Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es
$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$
completando los cuadrados, tenemos que la ecuación es
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5,$$
de donde, el centro de la circunferencia es el punto
$$(2,1).$$
Así, la isla debe ser colocada en el punto de coordenadas $(2,1)$. □

5. La base de la pared de un auditorio tiene forma parabólica que sigue la ecuación $y^2 - 4y - 8x - 20 = 0$. Se desea colocar el escenario principal en el lugar con mejor acústica, es decir, se desea colocar el escenario en el foco de la parábola. Determinar las coordenadas en las que se colocaría el escenario, además, encuentre la distancia que se tendría entre el escenario y el vértice de la pared. (2pt)

Solución. Vamos a colocar la ecuación de la parábola en su forma estándar, para esto, colocamos las variables en lados opuestos de la ecuación y obtenemos
$$y^2 - 4y = 8x + 20,$$
completamos los cuadrados y tenemos
$$(y-2)^2 = 8(x+3).$$

Dado que la ecuación estándar de la parábola que se abre para la derecha es

$$(y-k)^2 = 4p(x-h),$$

tenemos que

$$h = -3, \qquad k = 2 \qquad \text{y} \qquad p = 2;$$

por lo tanto:

- **vértice:** $(-3, 2)$ y
- **foco:** $(-1, 2)$.

Por lo tanto, el escenario se colocaría en el punto con coordenadas $(-1, 2)$ y la distancia al vértice es 2. □

- Por puntaje extra: Explique, en un párrafo, qué es una recta; además, dada la ecuación de una recta $y = mx + b$, explique qué significa cada parte de esta. El párrafo debe tener entre 100 y 200 palabras.

1. Se desea apoyar la base de una escalera a 6 metros de un muro vertical de 8 metros de altura. ¿Qué longitud debe tener la escalera para que coincida la parte más alta del muro con la parte final de la escalera?

Solución. **Definamos:**

- x: la longitud, en metros, que debe tener la escalera para que coincida la parte más alta del muro con la parte final de la escalera.

Planteamos: dado que se forma un triángulo rectángulo, con base 6 metros (distancia entre el punto de apoyo de la base de la escalera y el muro), altura 8 metros (la altura del muro) e hipotenusa x metros (longitud de la escalera), utilizando el Teorema de Pitágoras, tenemos que

$$8^2 + 6^2 = x^2.$$

Resolvemos: despejando, obtenemos que

$$\begin{aligned} 8^2 + 6^2 = x^2 &\iff x^2 = 100 \\ &\implies x = 10. \end{aligned}$$

Respuesta: La longitud de la escalera debe ser 10 metros para que coincidan la parte más alta del muro con la parte final de la escalera. □

2. Dados $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z, u\}$ y $C = \{0, 1, 2\}$, considere

- $f = \{(0, a), (2, c), (1, c)\}$;
- $g = \{(0, y), (1, c), (2, x)\}$;
- $p = \{(0, a), (1, c), (1, d), (2, b)\}$;
- $h = \{(a, x), (b, y), (c, u), (d, u)\}$.

Responda, justificando, las siguientes preguntas:

a) ¿Es f una función de C en A?, de serlo, ¿es inyectiva o sobreyectiva?

b) ¿Es g una función de C en B?, de serlo, ¿es inyectiva o sobreyectiva?

c) ¿Es p una función de C en A?, de serlo, ¿es inyectiva o sobreyectiva?

d) ¿Es h una función de A en B?, de serlo, ¿es inyectiva o sobreyectiva?

Solución.

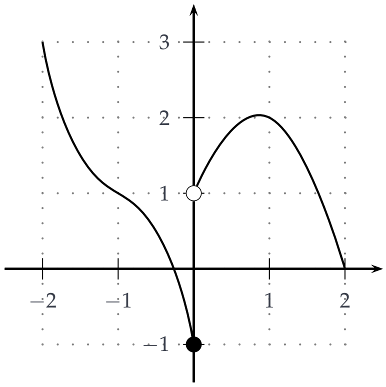
a) Tenemos que f sí es una función de C en A. No es inyectiva dado que al elemento c del conjunto de llegada le corresponden dos parejas en el conjunto de salida. Tampoco es sobreyectiva dado que el elemento d del conjunto de llegada no tiene una pareja que le corresponda en el conjunto de salida.

b) Tenemos que g no es una función de C en B dado que la segunda pareja tiene al elemento c que no pertenece al conjunto de llegada.

c) Tenemos que p no es función de C en A dado que al elemento 1 de conjunto de salida le corresponden dos elementos en el conjunto de llegada.

d) Tenemos que h sí es una función de A en B. No es inyectiva dado que al elemento u del conjunto de llegada le corresponden dos parejas en el conjunto de salida. Tampoco es sobreyectiva dado que el elemento z del conjunto de llegada no tiene una pareja que le corresponda en el conjunto de salida. $\square$

3. Considere la función $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica se muestra a continuación.



a) Determine la imagen de la función.

b) Determine si es inyectiva.

c) Determine si es sobreyectiva.

d) Determine los intervalos donde es creciente.

e) Determine los intervalos donde es decreciente.

Solución.

a) Por el gráfico, tenemos que
$$\operatorname{img}(f) = [-1,3]$$

b) No es inyectiva dado que, por ejemplo, el elemento 1 en el conjunto de llegada, tiene dos elementos correspondientes en el conjunto de salida.

c) No es sobreyectiva dado que su imagen no coincide con su conjunto de llegada.

d) La función es creciente en el intervalo $[0,1]$.

e) La función es decreciente en el intervalo $[-2,0]$ y en el intervalo $[1,2]$.

$\square$

4. Dadas
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - x + 1 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x + 1, \end{aligned}$$
determinar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

Solución.

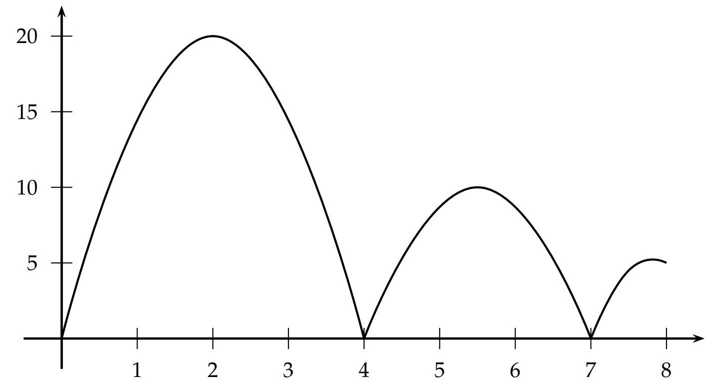
- $f \circ g$: Se tiene que
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(3x+1) \\ &= (3x+1)^2 - (3x+1) + 1 \\ &= 9x^2 + 3x + 1. \end{aligned}$$

- $g \circ f$: Se tiene que
$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g\left(x^2 - x + 1\right) \\ &= 3(x^2 - x + 1) + 1 \\ &= 3x^2 - 3x + 4. \end{aligned}$$

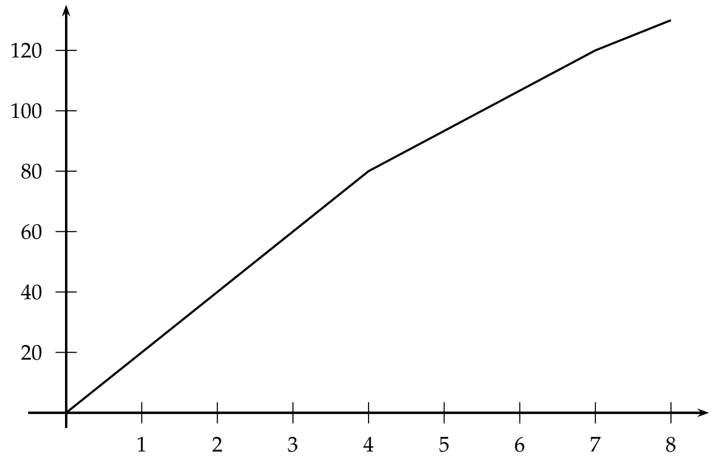
$\square$

5. Un bateador golpea una pelota de béisbol desde el ras del suelo. Esta alcanza una altura máxima de 20 metros, rebota en el suelo 4 segundos después a 80 metros de distancia del bateador, y continua rebotando. Elabore una gráfica que represente la altura a la que se encuentra la pelota en función del tiempo, desde que fue golpeada hasta 8 segundos después. Realice otra gráfica que represente la distancia horizontal recorrida de la pelota, desde que fue golpeada hasta 8 segundos después.

Solución. Si representamos el tiempo transcurrido desde que se golpea la pelota en el eje horizontal y la altura de la pelota en el eje vertical, tenemos que una posible gráfica de la función que representa la altura de la pelota en función del tiempo es:

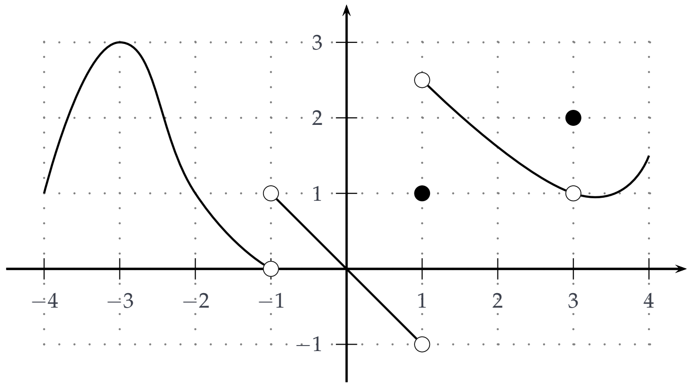


Ahora, si representamos el tiempo transcurrido desde que se deja la pelota en el eje horizontal y la distancia de la pelota al bateador en el eje vertical, tenemos que una posible gráfica de la función que representa la distancia de la pelota al bateador en función del tiempo es:



□

6. Considere la gráfica de la función $f : [-4, 4] \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, dada a continuación.



Determine:

a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ *c*) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ *e*) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *g*) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

b) $f(-3)$ *d*) $f(-1)$ *f*) $f(1)$ *h*) $f(3)$

Solución. Tenemos que:

a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 3$. *c*) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ no existe. *e*) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe. *g*) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$.

b) $f(-3) = 3$. *d*) $f(-1)$ no existe. *f*) $f(1) = 1$. *h*) $f(3) = 2$. $\square$

7. Calcular los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to -2}(1 - x - x^2)$ *b*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-x+2}$ *c*) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x+1}$

Solución.

a) Dado que es una función polinomial, tenemos que

$$\lim_{x\to -2}(1 - x - x^2) = 1 - (-2) - (-2)^2 = -1.$$

b) Calculemos primero el límite de denominador, dado que es una función polinomial, tenemos que

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - x - 2) = (1)^2 - (1) - 2 = -2 \neq 0;$$

ahora, calculemos el límite del numerador, al ser una función polinomial, tenemos que

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 1) = (1)^2 - 1 = 0.$$

Dado que ambos límites existen y el del denominador es diferente de 0, tenemos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x-2)} = \frac{0}{-2} = 0.$$

c) Calculemos primero el límite de denominador, dado que es una función polinomial, tenemos que

$$\lim_{x\to -1}(x+1) = (-1) + 1 = 0;$$

como este límite es igual a 0, no podemos aplicar la propiedad del límite de una división. Procedamos a realizar una manipulación algebraica, notemos que

$$\frac{x^2-x-2}{x+1} = \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = x - 2$$

para $x \neq -1$, por lo tanto, analicemos el límite

$$\lim_{x\to -1}(x-2);$$

dado que es una función polinomial, tenemos que

$$\lim_{x\to -1}(x-2) = (-1) - 2 = -3;$$

por lo tanto, tenemos que

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-x-2}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-2) = -3.$$ $\square$

- Por puntaje extra: dada la siguiente definición formal de función; en un párrafo explique con sus propias palabras el significado de ésta. El párrafo debe tener entre 100 y 200 palabras.

  Función: Dados A y B dos conjuntos, f es una **función de** A **en** B si:

  - $f \subseteq A \times B$;
  - para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$; y
  - si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$, entonces $y = z$.

1. La base de la pared de una estructura tiene forma de parábola horizontal. Bajo un sistema de referencia, el vértice se encuentra en el punto $(-2,1)$, además, la pared pasa por el punto $(-4,5)$. Determine la ecuación de la parábola y su foco.

Solución. Por la disposición de los puntos, se sabe que es una parábola que se abre hacia la izquierda, por lo tanto, su ecuación es

$$(y-k)^2 = -4p(x-h).$$

Tenemos que el vértice de esta parábola es (h,k), por lo tanto $h=-2$ y $k=1$. Con esto, la ecuación de la parábola es

$$(y-1)^2 = -4p(x+2).$$

Ahora, para que pase por el punto $(-4,5)$, es necesario que

$$(5-1)^2 = -4p(-4+2),$$

de donde, $p=2$. Así, la ecuación de la parábola es

$$(y-1)^2 = -8(x+2).$$

Finalmente, el foco de la parábola es

$$(h-p,k) = (-4,1). \qquad \square$$

2. Considere los puntos $A=(-4,1)$, $B=(1,3)$ y $C=(-1,1)$.

   a) Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B
   b) Determine la distancia entre la recta AB y el punto C.
   c) Determine la ecuación de la recta perpendicular a la recta AB que pase por el punto C.

Solución.

a) Para determinar la recta que pasa por los puntos A y B, utilizamos el modelo

$$y = mx+b. \tag{1}$$

Para esto, primero encontramos la pendiente m

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{3-1}{1-(-4)} = \frac{2}{5}, \tag{2}$$

luego este valor de la pendiente y las coordenadas del punto B reemplazamos en la ecuación (1) y obtenemos el valor de b

$$3 = \frac{2}{5}(1)+b \iff b = \frac{13}{5}$$

y por último, tanto el valor de b como el de la pendiente m sustituimos en la ecuación (1). Con lo cual, la ecuación que pasa por los puntos A y B es

$$y = \frac{2}{5}x+\frac{13}{5} \iff 0 = 2x-5y+13.$$

b) La distancia entre el punto C y la recta que pasa por los puntos A y B es

$$\frac{|2(-1)-5(1)+13|}{\sqrt{(2)^2+(-5)^2}} = \frac{6}{\sqrt{29}}.$$

c) Supongamos que la ecuación de la recta ℓ_p es

$$y = mx + b,$$

(utilizo esta ecuación dado que las condiciones indicadas en el ejercicios tienen que ver con perpendicularidad y por lo tanto, con la pendiente). Debemos determinar los valores de m y de b.

Dado que la recta que pasa por los puntos A, B y ℓ_p deben ser perpendiculares; el producto de sus pendientes debe ser -1. El valor de la pendiente de la recta que pasa por A y B se encuentra en la ecuación (2), con lo cual obtenemos el valor de m_ℓ, es la única incógnita

$$m \cdot m_\ell = -1,$$

por lo tanto

$$\frac{2}{5} \cdot m_\ell = -1$$

de donde

$$m_\ell = -\frac{5}{2}$$

y por lo tanto, la ecuación de ℓ_p es

$$y = -\frac{5}{2}x + b.$$

Ahora, para determinar b, analizo la otra condición para la recta ℓ_p, es decir, debe pasar por el punto $(-1, 1)$, por lo tanto, este punto debe cumplir la ecuación de la recta ℓ_p, por lo tanto

$$1 = -\frac{5}{2}(-1) + b$$

de donde

$$b = -\frac{3}{2}.$$

Así, la ecuación de ℓ_p es

$$y = -\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}.$$

□

3. Consideremos los conjuntos

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \qquad \text{y} \qquad B = \{3, 4, 5, 6, 7\}.$$

a) Escribir una función de A en B que no sea inyectiva y explicar por qué no es inyectiva.

b) Escribir una función de A en B que sea inyectiva y explicar por qué es inyectiva.

c) Escribir una relación que no sea función de A en B. Explicar por qué no es función.

Solución.

a) Consideremos $f = \{(0,3); (1,3); (2,4); (3,5)\}$. Esta es función que no es inyectiva puesto que el elemento 3 de la imagen le corresponden dos preimágenes.

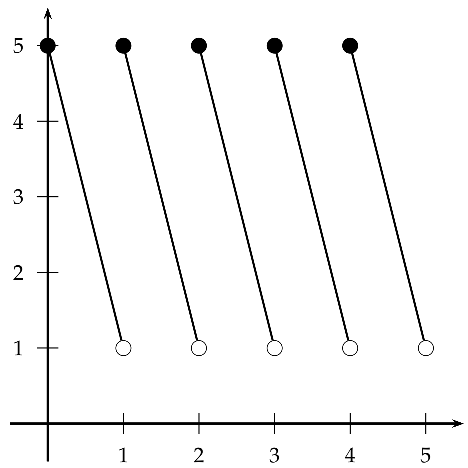
b) Consideremos $g = \{(0,3); (1,4); (2,5); (3,6)\}$. Esta es función que es inyectiva puesto que todos los elementos de la imagen les corresponden una sola preimagen.

c) Consideremos $h = \{(0,3); (1,4); (2,5)\}$. Esta no es función puesto que al elemento 3 del dominio no le corresponde una imagen.

$\square$

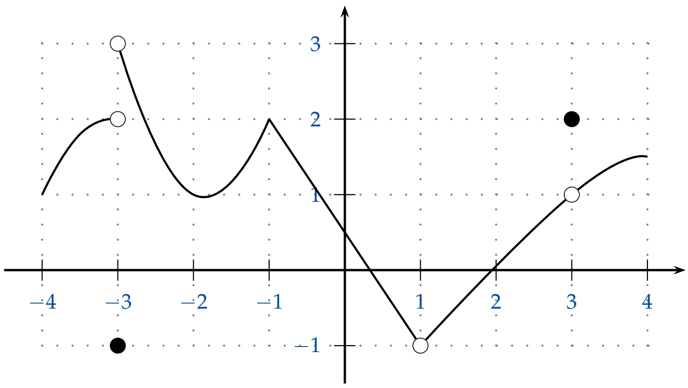
4. Cierto restaurante de la ciudad, empieza el día con 5 quintales de comida. se sabe que cada día vende 4 quintales. Represente cómo la cantidad de comida va disminuyendo en el restaurante durante 5 días de la semana.

Solución.



$\square$

5. Considere la gráfica de la función $f\colon [-4,4] \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, dada a continuación.



Determine:

a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$
b) $f(-3)$
c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$
d) $f(-1)$
e) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
f) $f(1)$
g) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$
h) $f(3)$

Solución. Tenemos que:

a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ no existe.
b) $f(-3) = -1$.
c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$.
d) $f(-1) = 2$.
e) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$.
f) $f(1)$ no existe.
g) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$.
h) $f(3) = 2$. $\square$

6. Determinar la derivada de las funciones definidas por:

a) $g(x) = 3x - x^2$, utilizando la definición.
b) $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$, utilizando las propiedades.

Solución.

a) Se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{3(x+h)-(x+h)^2-(3x-x^2)}{h} \\
&= \frac{3x+3h-x^2-2xh-h^2-3x+x^2}{h} \\
&= \frac{3h-2xh-h^2}{h} \\
&= 3-2x+h
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 3-2x+h \\
&= 3-2x.
\end{aligned}
$$

b) Tenemos que

$$
f'(x) = \left((2x^2+1)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}(2x^2+1)^{-1/2}(2x^2+1)' = \frac{1}{2}(2x^2+1)^{-1/2}(4x). \qquad \square
$$

7. Determinar los extremos de la función

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto 18x - \frac{2}{3}x^3 + 5,
\end{aligned}
$$

utilizando la segunda derivada para saber si son mínimos o máximos.

Solución. Empecemos determinando la derivada de la función:

$$
f'(x) = -2x^2 + 18,
$$

ahora, para encontrar los puntos críticos, igualemos la derivada a 0, notemos que

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\iff -2x^2+18 = 0 \\
&\iff x^2 - 9 = 0 \\
&\iff (x-3)(x+3) = 0 \\
&\iff x = 3 \quad \text{o} \quad x = -3,
\end{aligned}
$$

Con esto, la función tiene puntos críticos en 3 y en -3. Para saber si son mínimos o máximos, volvamos a derivar la función:

$$
f''(x) = -4x.
$$

Evaluamos la segunda derivada en los puntos críticos:

$$
f''(3) = -12 \qquad \text{y} \qquad f''(-3) = 12,
$$

por lo tanto, la función alcanza un mínimo en -3 y un máximo en 3. $\square$

8. Con 12 metros de una varilla se desea formar un arco con forma de triángulo isósceles. Si se desea que el arco encierre la mayor área posible, ¿cuáles deben ser las dimensiones del arco?

Solución. Definamos:

- b: longitud, en m, de la base del arco.

- h: altura, en m, del arco.
- $A(b,h)$: área, en m^2, del arco cuya longitud de la base es b metros y cuya altura es h metros.

Dado que solo se cuenta con 12 m de material, lo máximo que puede valer la altura es 6 m y lo máximo que puede valer la base es 12 m, por lo tanto, el área del arco está dado por

$$\begin{aligned} A\colon [0,12]\times[0,6] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (b,h) &\longmapsto \frac{1}{2}bh. \end{aligned}$$

Ahora, dado que se cuenta únicamente con 12 m de material para el borde, tenemos que

$$2\sqrt{h^2+(b/2)^2}=12,$$

de donde

$$h=\sqrt{36-\frac{b^2}{4}}.$$

Reemplazando esta expresión en la función de área, obtenemos una nueva función que modeliza el área, con eso, definamos

- $S(b)$: área, en m^2, del arco cuya longitud de la base es b y utiliza 12 m de varilla,

y tenemos

$$\begin{aligned} S\colon [0,12] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ b &\longmapsto \frac{1}{2}b\sqrt{36-\frac{b^2}{4}}=\frac{1}{4}b\sqrt{144-b^2} \end{aligned}$$

Como debemos encontrar el máximo de esta función, procedamos a derivar la función S; se tiene que

$$S'(b)=\frac{72-b^2}{2\sqrt{144-b^2}}$$

para $b\in[0,12]$. Ahora, para encontrar sus puntos críticos, notemos que

$$\begin{aligned} S'(b)=0 \quad &\iff \quad \frac{72-b^2}{2\sqrt{144-b^2}}=0 \\ &\iff \quad b^2=72 \\ &\iff \quad b=\sqrt{72} \end{aligned}$$

Así, el punto crítico es $\sqrt{72}$. Como la función está definida en un intervalo cerrado y acotado, la función alcanza su máximo en los extremos del intervalo o en los puntos críticos del interior, es decir, en los puntos 0, $\sqrt{72}$ y 12. Dado que tenemos

$$S(0)=0, \qquad S\left(\sqrt{72}\right)=18 \qquad \text{y} \qquad S(12)=0,$$

la función S alcanza el máximo valor de 18 en $\sqrt{72}$.

Para encontrar el valor de la altura del arco buscado, primero reemplazamos el valor de b en la expresión $h=\sqrt{36-\frac{b^2}{4}}$:

$$h=\sqrt{18},$$

En resumen, las dimensiones para que el arco tenga la mayor área son $\sqrt{72}$ m de base y $\sqrt{18}$ m de altura. $\square$