PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR

ECUACIONES DIFERENCIALES • PRUEBA NO. 1

2 de octubre de 2017 *Mat. Andrés Merino*

1. Muestre que la función definida por $x(t)$ dada implícitamente por $\ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) = t$ es solución de la ecuación
$$x'(t) = (x(t)-1)(1-2x(t)).$$

2. ¿Para qué valores de m se tiene que la función definida por $y(x) = e^{mx}$ es una solución de
$$2y''(x) + 7y'(x) - 4y(x) = 0?$$

3. ¿Para qué valores de c_1 y c_2 se tiene que la función definida por $y(x) = c_1\cos(t) + c_2\operatorname{sen}(t)$ es una solución del problema
$$y''(x) + 4y(x) = 0,$$
$$y(\pi/2) = 0, \qquad y(\pi/2) = 1?$$

4. Resolver el siguiente problema
$$y'(x) = \frac{xy(x) + 2y(x) - x - 2}{xy(x) - 3y(x) + x - 3},$$
$$y(2) = 0?$$

5. Para resolver el siguiente problema primero analice si es una ecuación definida por una función homogenea, de serlo, utilice un cambio de variable adecuado
$$2xy(x)y'(x) = y(x)^2 + x^2.$$

6. Determine si el siguiente problema tiene solución única
$$(y(x) - x)y'(x) = 2 + x,$$
$$y(2) = 0.$$

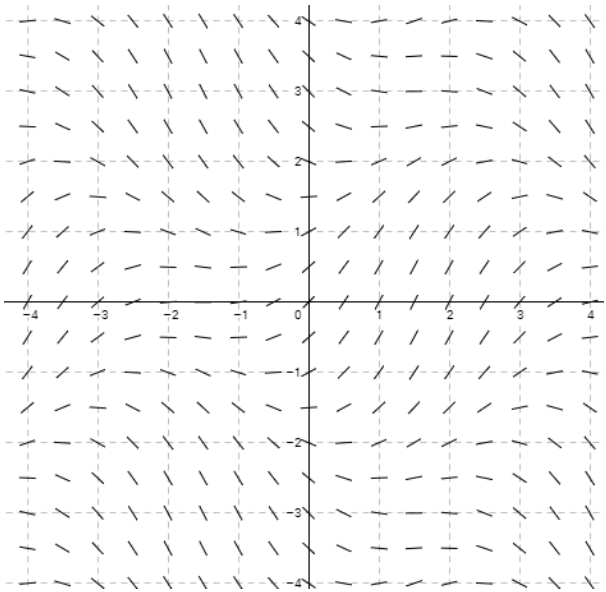
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR
ECUACIONES DIFERENCIALES • EXAMEN NO. 1

16 de octubre de 2017 *Mat. Andrés Merino*

1. Determine si la función definida por $y(x)$, definida de forma implícita por $x + y = \operatorname{arc\,tg}(y)$ es solución del problema

$$1 + y(x)^2 + y(x)^2 y'(x) = 0$$
$$y(0) = 0.$$

2. Considere la ecuación $y'(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(y)$, en el siguiente gráfico se presenta el campo de direcciones de la función $f(x, y) = \operatorname{sen}(x) + \cos(y)$. Graficar la solución de la ecuación bajo la condición inicial $(1, -1)$.



3. Resolver el siguiente problema

$$xy(x)y'(x) = (x + 1)(y(x) + 1)$$
$$y(1) = 0$$

4. Para resolver el siguiente problema primero analice si es una ecuación definida por una función homogenea, de serlo, utilice un cambio de variable adecuado
$$xy'(x) = \sqrt{y(x)^2 - x^2}.$$
5. En la siguiente ecuación utilice el cambio de variable $z = x + y$ para resolverla:
$$y'(x) = (x + y(x))^2.$$
6. Demostrar que la siguiente ecuación es exacta y resolverla:
$$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) - \tan(x) = \cos(x)\cos(y)y'$$
7. Demostrar que la siguiente ecuación no es exacta, luego encontrar un factor integrante apropiado y escribir la nueva ecuación equivalente (no se pide resolverla):
$$(y\ln(y) - 2xy)dx + 2xydy = 0.$$
8. Resolver la siguiente ecuación:
$$y'(x) - 2xy(x) = 6xe^{x^2}.$$

$\aleph_0$

Pontificia Universidad Católica del Ecuador

Ecuaciones Diferenciales • Prueba No. 2

8 de noviembre de 2017 *Mat. Andrés Merino*

1. Resolver la siguiente ecuación de Bernoulli: $xy'(x) + y(x) = 1/y(x)^2$.

2. Dada la siguiente edo:
$$y'(x) = \frac{2\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) + y(x)^2}{2\cos(x)},$$
comprobar que $y_1(x) = \operatorname{sen}(x)$ es una solución, luego encontrar la solución general.

3. Resolver la siguiente edo: $y''(x) + 25y(x) = 0$.

4. Un vehículo llega a una obra con asfalto a 150°C. Por problemas técnicos no se puede proceder inmediatamente al vertimiento del mismo y se observa que en 5 minutos disminuyó su temperatura en 3°C. Si la obra se la está realizando durante el invierno, es decir, se tiene una temperatura ambiental de 5°C, y que el asfalto se lo debe verter a una temperatura mínima de 130°C, ¿qué tiempo se dispone para solucionar los problemas técnicos? Si, en cambio, la obra se la realiza en verano, con una temperatura ambiental de 30°C, ¿qué tiempo se tendría?

5. Entras a una fiesta y empiezas a consumir alcohol, la bebida de la noche es cuba libre, el cual tiene 50 gramos de alcohol por litro. Tomas la bebida a una tasa variable en el tiempo modelada por $0{,}25\cos(t) + 0{,}25$ litros por hora, donde el tiempo t está medido en horas. Además, luego de que tu cuerpo procesa el alcohol en tu sangre, vas al baño y orinas a una tasa variable en el tiempo modelada por $0{,}25\operatorname{sen}(t) + 0{,}25$ litros por hora. Con esto datos, y suponiendo que el cuerpo humano normalmente tiene 40 litros de líquidos, escribe una ecuación que modele la cantidad de alcohol en tu organismo al tiempo t (no resolver la ecuación). Suponiendo que se resuelve la ecuación y que el nivel permitido en el país para conducir un automovil es de 0.3 gramos de alcohol por litro de sangre, ¿qué procedimiento debes plantear para saber cuándo debes dejar de beber para poder conducir?

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR

ECUACIONES DIFERENCIALES • EXAMEN NO. 1

16 de octubre de 2017 *Mat. Andrés Merino*

---

1. Resolver la siguiente ecuación de Bernoulli:

$$e^{2x}y'(x) + e^{2x}y(x) = 1/y(x)^2,$$

con $y(0) = 2$

2. Para derrotar a Majin Buu, Son Goku empieza a generar la genki-dama con el ki de todos los habitantes del universo. Como es bien sabido, el ki de un habitante puede estar contaminado por ki malvado y la genki-dama es efectiva si tiene a lo más una concentración del 25 % de ki malvado. Goku, para iniciar la formación, da 100 unidades de ki puro y empieza a recibir ki de los habitantes a una velocidad de 30 unidades de ki por minuto, este ki posee ki malvado en una relación de 3 unidades de ki malvado por cada 10 unidades de ki. Dada la sorprendente cantidad de ki, Goku no puede controlarlo todo y este escapa de la genki-dama a una velocidad de 5 unidades de ki por minuto. Determinar ecuaciones que modelen la cantidad de ki total que tiene la genki-dama y la cantidad de ki malvado que tiene. Si Goku recolecta ki durante 10 minutos, ¿cuánto ki ha recolectado?, ¿la genki-dama será efectiva?

Solución. Tomemos

- t: el tiempo medido en minutos.
- $K(t)$: el ki total de la genki-dama en el tiempo t medido en unidades de ki.
- $M(t)$: el ki malvado de la genki-dama en el tiempo t medido en unidades de ki.

El problema está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dK}{dt}(t) = 30 - 5, \qquad K(0) = 100 \qquad \text{y} \qquad \frac{dM}{dt}(t) = 30\frac{3}{10} - 5\frac{M(t)}{K(t)}, \qquad M(0) = 0.$$

Resolviendo la primera ecuación junto con la condición inicial se tiene que

$$K(t) = 25t + 100,$$

reemplazando en la segunda

$$\frac{dM}{dt}(t) = 30\frac{3}{10} - 5\frac{M(t)}{25t + 100},$$

reescribiendo

$$M'(t) + \frac{1}{5t + 20}M(t) = 9,$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de primer orden, cuya solución está dada por

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt[5]{5t+20}}\left(\frac{3}{2}(5t+20)^{6/5} + c\right).$$

Utilizando la condición inicial $M(0) = 0$, se tiene que $c = -\frac{3}{2}(20)^{6/5}$. Así, la solución es:

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt[5]{5t+20}}\left(\frac{3}{2}(5t+20)^{6/5} - \frac{3}{2}(20)^{6/5}\right).$$

Ahora, con $t = 10$ se tiene

$$K(10) = 350, \qquad M(t) \approx 81{,}64.$$

Con esto, Goku ha recolectado 350 unidades de ki con una concentración aproximada de $\frac{81{,}64}{350} \cdot 100 \approx 23{,}32\,\%$ de ki malvado, con lo cual se tiene que la genki-dama es efectiva y derrotará a Majin Buu. □

3. Dada una ecuación diferencial lineal de orden n, ¿por qué se dice que el conjunto de soluciones forma un espacio vectorial? ¿cuál es la dimensión de este?

4. Comprobar que la función $y_1(x) = x$ es solución de la ecuación

$$(1+2x)y''(x) + 4xy'(x) - 4y(x) = 0,$$

encontrar otra solución utilizando la fórmula de Abel. Finalmente, comprobar que estas soluciones son linealmente independientes.

5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales

   a) $y''(x) - 6y'(x) + 13y(x) = 0$ con $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$.

   b) $y''''(x) - 5y'''(x) + 3y''(x) + 9y'(x) = 0$.

   c) $y''(x) - 9y(x) = 2 + e^{3x}$.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR

ECUACIONES DIFERENCIALES • PRUEBA NO. 3

3 de enero de 2018 — *Mat. Andrés Merino*

1. Si t representa el tiempo en segundos y $x(t)$ representa el movimiento de un objeto, escribir la ecuación general de un movimiento oscilatorio. ¿Qué significa cada término?
2. ¿Qué tipos de movimientos amortiguados existen? Realizar una gráfica de cada uno de ellos.
3. ¿Qué es la deflexión de una viga? ¿Qué significan las constantes E e I de su modelamiento?
4. ¿Por qué no se puede calcular $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s+1}{s-1}\right](t)$?
5. Una de tus metas para este nuevo año es realizar salto *bungee* desde un puente de 40 metros de altura. Un conocido del amigo de tu primo ofrece ayudarte con el salto indicándote que sus instrumentos son totalmente seguros. Dado que confías más en tus amplios conocimiento en Ecuaciones Diferenciales que en la palabra de un extraño, le pides los datos del salto para realizar los cálculos tu mismo y constatar si este es seguro. El sujeto te informa que la contante elástica de la cuerda que utilizarás es de 120 newtons por metro, además, que si simplemente te cuelgas de la cuerda, esta alcanza una longitud de 25 metros. Dado que la primera parte del salto es una simple caída libre, realizas los cálculos y tu velocidad al pasar por el punto de equilibrio sería de 21 metros por segundo. Asumiendo que tu masa es de 60 kilogramos y que la fricción con el aire es despreciable, ¿realmente es seguro el salto?
6. Una viga de longitud 1m está empotrada en su extremo izquierdo y apoyada simplemente en su extremo derecho. Soporta un peso modelado por $w(x) = 2\pi^3 EI \operatorname{sen}(\pi x)$. Calcular la deflexión de la viga; ¿en qué punto se da su máxima deflexión (no hace falta calcularlo)?
7. Calcular, utilizando la definición, $\mathscr{L}[t](s)$.
8. Calcular $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5+12s^2-s^3}{s^2(s-1)(s-9)}\right](t)$.

9. Calcular $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2s+3}{s^2+4}\right](t)$.

10. Resolver, utilizando transformada de Laplace, la ecuación

$$y''(t) - 10y'(t) + 9y(t) = 5t$$

bajo las condiciones iniciales $y(0) = -1$ y $y'(0) = 2$.

¡El mejor de los éxitos para este nuevo año!

Pontificia Universidad Católica del Ecuador

Ecuaciones Diferenciales • Examen Final

15 de enero de 2017

1. Resolver la siguiente ecuación:

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x + \sqrt{xy(x)}},$$

bajo la condición $y(1) = 2$.

Demostración. Definamos $f(u, v) = \frac{v}{u+\sqrt{uv}}$, se tiene que esta función es homogenea, en efecto,

$$f(tu, tv) = \frac{tv}{tu + \sqrt{(tu)(tv)}} = \frac{tv}{t(u + \sqrt{uv})} = \frac{v}{u + \sqrt{uv}},$$

por lo tanto, el cambio de variable $y = ux$ transforma la ecuación en una a variables separadas. Derivando, tenemos que

$$y' = u'x + u.$$

Reemplazando en la ecuación:

$$u'x + u = \frac{ux}{x + \sqrt{x(ux)}},$$

así,

$$\begin{aligned}
u'x + u = \frac{u}{1 + \sqrt{u}} &\iff u'x = \frac{u}{1+\sqrt{u}} - u \\
&\iff u'x = \frac{-u\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}} \\
&\iff u' = \frac{-u\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{x} \\
&\iff \frac{1+\sqrt{u}}{-u\sqrt{u}} du = \frac{1}{x} dx \\
&\iff \left(-\frac{1}{u^{3/2}} - \frac{1}{u}\right) du = \frac{1}{x} dx
\end{aligned}$$

Con lo cual, integrando, obtenemos que

$$\left(-\frac{1}{u^{3/2}} - \frac{1}{u}\right) du = \frac{1}{x} dx \iff \int \left(-u^{-3/2} - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\iff 2u^{-1/2} - \ln(u) = \ln(x) + c.$$

Regresando a la variable original, se tiene que la solución es

$$2\left(\frac{y}{x}\right)^{-1/2} - \ln\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(x) + c$$

Utilizando la condición inicial $y(1) = 2$

$$2\left(\frac{2}{1}\right)^{-1/2} - \ln\left(\frac{2}{1}\right) = \ln(1) + c,$$

de donde $c = \sqrt{2} - \ln(2)$. Así, la solución es:

$$2\sqrt{\frac{y}{x}} - \ln\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(x) + \sqrt{2} - \ln(2). \qquad \square$$

2. Resolver la siguiente ecuación $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = e^x + 2$,

Demostración. Consideremos la ecuación homogenea: $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0$, al escribirla en forma de operadores, se tiene

$$(D^2 + D - 2I)y = 0,$$

lo que equivale a

$$(D + 2I)(D - I)y = 0.$$

Las soluciones son:

- $(D + 2I)$: e^{-2x},
- $(D - I)$: e^x,

con lo cual, la solución de la parte homogenea es

$$y_h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x.$$

Por otro lado, los aniquiladores de la ecuación no homogeneas son

- 2: D,
- e^x: $(D - I)$,

así, se tiene la ecuación

$$D(D + 2I)(D - I)^2 y = 0,$$

cuyas soluciones son:

- $(D + 2I)$: e^{-2x},

- $(D-I)^2$: e^x, xe^x
- D: 1.

con lo cual, la solución particular es de la forma

$$y_p(x) = A + Bxe^x,$$

reemplazando en la ecuación original, se tiene que

$$(A + Bxe^x)'' + (A + Bxe^x)' - 2(A + Bxe^x) = e^x + 2$$

lo que equivale a

$$3Be^x - 2A = e^x + 2,$$

así, $A = -1$ y $B = \frac{1}{3}$. Con esto, la solución de la ecuación es:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^x - 1 + \frac{1}{3}xe^x. \qquad \square$$

3. Resolver la siguiente ecuación utilizando la transformada de Laplace:

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = \delta(t - 2\pi),$$

bajo la condición $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$.

Demostración. Aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación,

$$\begin{aligned}
&y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = \delta(t-2\pi) \iff \\
&\qquad \iff \mathscr{L}\left[y''(t) + 4y'(t) + 5y(t)\right](s) = \mathscr{L}\left[\delta(t-2\pi)\right](s) \\
&\qquad \iff s^2\mathscr{L}\left[y(t)\right](s) - sy(0) - y'(0) \\
&\qquad\qquad + 4\left(s\mathscr{L}\left[y(t)\right](s) - y(0)\right) + 5\mathscr{L}\left[y(t)\right](s) = e^{-2\pi t} \\
&\qquad \iff (s^2 + 4s + 5)\mathscr{L}\left[y(t)\right](s) = e^{-2\pi t} \\
&\qquad \iff \mathscr{L}\left[y(t)\right](s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 5}e^{-2\pi t}
\end{aligned}$$

Tomando la transformada de Laplace inversa, se tienes

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}\left[y(t)\right](s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 5}e^{-2\pi t} \iff \\
&\qquad \iff \mathscr{L}^{-1}\left[\mathscr{L}\left[y(t)\right](s)\right](t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 4s + 5}e^{-2\pi t}\right](t) \\
&\qquad \iff y(t) = u(t-2\pi)\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 4s + 5}\right](t - 2\pi) \\
&\qquad \iff y(t) = u(t-2\pi)\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2 + 1}\right](t - 2\pi)
\end{aligned}$$

$$\iff y(t) = u(t-2\pi)e^{2\pi(t-2\pi)}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t-2\pi)$$
$$\iff y(t) = u(t-2\pi)e^{-2(t-2\pi)}\operatorname{sen}(t-2\pi)$$
$$\iff y(t) = u(t-2\pi)e^{-2(t-2\pi)}\operatorname{sen}(t).$$

Así, la solución es:

$$y(t) = u(t-2\pi)e^{-2(t-2\pi)}\operatorname{sen}(t). \qquad \square$$

4. Un estanque contiene 1000m^3 de agua contaminada. Con el propósito de descontaminarlo se introduce agua limpia a razón de 20 m^3/min y el agua contaminada uniformemente mezclada se deja salir del estanque a 15 m^3/min.

   a) Hallar la ecuación que modela el porcentaje de contaminación del agua y resolverla (puede dejarla con la integral expresada).

   b) ¿Qué se debe hacer para calcular el porcentaje de contaminantes se habrá eliminado después de media hora?

   c) ¿Qué se debe hacer para calcular el tiempo debe transcurrir para que los contaminantes disminuyan en un 95 %?

Demostración. Tomemos:

- t: el tiempo en minutos;
- $V(t)$: el volumen contenido en el estanque en m^3 el tiempo t;
- $K(t)$: la concentración de contaminación en porcentaje en el tiempo t.

Planteando las ecuaciones, se tiene que la variación en la cantidad contenida en el estanque está dada por

$$V'(t) = 20 - 15,$$

con $V(0) = 1000$. La variación en la concentración de contaminación del estanque está dada por

$$K'(t) = 20 \cdot 1 - 15 \cdot K(t) \cdot V(t).$$

con $K(0) = 0$.

Resolviendo la ecuación para V, se tiene que

$$V(t) = 5t + c_1,$$

con la condición inicial, se tiene que $c_1 = 1000$. Así

$$V(t) = 5t + 1000.$$

Con esto, se tiene la ecuación

$$K'(t) = 20 - 15K(t)(5t + 1000)$$

la cual puede ser escrita en la forma

$$K'(t) + (75t + 15000)K(t) = 20$$

la cual es lineal y su solución esta dada por

$$K(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t) \cdot 20dt,$$

con

$$\mu(t) = \exp\left(\int (75t + 15000)dt\right) = \exp\left(37{,}5t^2 + 15000t\right),$$

así, el porcentaje de contaminación en el estanque esta dada por

$$K(t) = e^{-37{,}5t^2 - 15000t} \int 20e^{37{,}5t^2 15000t} dt.$$

Para calcular el porcentaje de contaminantes se habrá eliminado después de media hora se debe calcular $K(20)$.

Para calcular el tiempo debe transcurrir para que los contaminantes disminuyan en un 95 % se debe calcular t tal que $K(t) = 0{,}95$. □

5. Una masa que pesa 200 gramos alarga 10 centímetros un resorte. La masa se libera al inicio desde el reposo en un punto 5 centímetros abajo de la posición de equilibrio (utilizar $10\mathrm{m/s}^2$ para la gravedad).

   a) Encuentre la posición de la masa luego de $\pi/10$ segundos.

   b) ¿Cuál es la velocidad de la masa luego de $3\pi/20$ segundos? ¿En qué dirección se dirige la masa en este instante?

   c) ¿En qué tiempos la masa pasa por la posición de equilibrio?

Demostración. Tomemos:

- t: el tiempo en segundos;
- $x(t)$: la posición de la masa en m medida desde el punto de equilibrio hacia abajo en el tiempo t;
- k: constante de elasticidad en N/m;
- m: masa en kg (0.2kg);
- g: gravedad;

- l: elongación en el equilibrio en metros (0.1cm).

La constante k está dada por

$$m \cdot g = k \cdot l.$$

por lo tanto $k = 20$. Con esto, se tiene que la ecuación que del movimiento es

$$0{,}2x''(t) + 20x(t) = 0$$

sujeto a las condiciones $x(0) = 0{,}05$ y $x'(0) = 0$. Colocando la ecuación en forma operadores se tiene

$$(D^2 + 100I)x = 0,$$

y las respuestas son

- $(D^2 + 100I)$: $\operatorname{sen}(10t), \cos(10t)$.

Con esto, la solución es

$$x(t) = c_1 \operatorname{sen}(10t) + c_2 \cos(10t).$$

Con las condiciones iniciales:

$$0{,}05 = c_1 \operatorname{sen}(0) + c_2 \cos(0) \qquad \text{y} \qquad 0 = 10c_1 \cos(0) - 10c_2 \operatorname{sen}(0),$$

por lo tanto $c_1 = 0$ y $c_2 = 0{,}05$. Así, la solución es

$$x(t) = 0{,}05 \cos(10t).$$

a) La posición de la masa luego de $\pi/10$ segundos es $x(\pi/10) = 0{,}05\cos(\pi) = -0{,}05$m, es decir, 5cm por encima de la posición de equilibrio.

b) La velocidad de la masa luego de $3\pi/20$ segundos es

$$x'(3\pi/20) = -0{,}5 \operatorname{sen}(3\pi/2) = 0{,}5\text{m/s},$$

la partícula se dirige hacia abajo.

c) El tiempo en el que la partícula pasa por el origen es cuando $x(t) = 0$, así

$$\begin{aligned} x(t) = 0 &\iff 0{,}05\cos(10t) = 0 \\ &\iff \cos(10t) = 0 \\ &\iff 10t = (2k+1)\pi \\ &\iff t = \frac{(2k+1)\pi}{10} \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{N}$, es decir, la partícula pasa por la posición de a los $\frac{(2k+1)\pi}{10}$ segundos, para cada $k \in \mathbb{N}$. $\square$