Fascículos de Matemática
del Proyecto CLAVEMAT

1 (1)

Análisis Matemático II

Apuntes de clase

1. Espacios de Hilbert

Proyecto CLAVEMAT

FASCÍCULOS DE MATEMÁTICA
DEL PROYECTO CLAVEMAT

PROYECTO CLAVEMAT

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

APUNTES DE CLASE

1. Espacios de Hilbert

Fascículo de Matemática No. 1 (1)

ANÁLISIS MATEMÁTICO II: APUNTES DE CLASE
1. ESPACIOS DE HILBERT

PROYECTO CLAVEMAT

Escrito por: Andrés Merino - Andrés Miniguano

Revisión Académica: el texto aún no cuenta con revisión académica de pares

Registro de derecho autoral No.
ISBN: 978-0000-000-00

Publicado por el proyecto CLAVEMAT de la Escuela Politécnica Nacional, Ladrón de Guevara E11-253, Quito, Ecuador.

Primera edición: 2016
Primera impresión: 2016

ÍNDICE GENERAL

1. Espacios de Hilbert **3**

1.1. Espacios con producto interno 3

1.2. Complementos ortogonales y sumas directas 11

1.2.1. Conjuntos totales 17

1.3. Teorema de representación de Riesz 18

1.4. Tópicos adicionales 22

1.4.1. Propiedades de la Proyección 22

1.4.2. Formas Bilineales y Sesquilineales 24

1.4.3. Segunda forma del Teorema de Representación de Riesz 26

1.4.4. Teoremas de Stampacchia y Lax-Milgram 28

1.5. Ejercicios propuestos 33

1.6. Ejercicios resueltos 34

PREFACIO

El presente libro es la recopilación de los apuntes de clase de la asignatura "Análisis Matemático II" dictada por el profesor Mat. Andrés Merino en la carrera de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional, y recopilados por el estudiante Andrés Miniguano, el cual cursó la asignatura en el semestre referencial 2014-B.

Esta asignatura aborda los temas de Espacios de Hilbert, Teoremas Clásicos del Análisis y Cálculo en Espacios de Banach.

Fascículo 1

Espacios de Hilbert

En este capítulo se estudiarán las propiedades de los espacios de Hilbert, los cuales son espacios vectoriales completos dotados con una operación llamada producto interno. A lo largo de estos apuntes, los espacios vectoriales se definen sobre un campo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ puede referirse al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ o de los números complejos $\mathbb{C}$.

1.1. Espacios con producto interno

Definición 1.1: Producto interno

Sea E un espacio vectorial real o complejo. Diremos que una función

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \colon E \times E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

es un producto interno (o producto escalar) *sobre E si para todo $x, y, z \in E$ se cumple que*

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
2. $\langle \alpha x, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$;
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$; *y*
5. $\langle x, x \rangle = 0$ *si y solo si* $x = 0$.

A un espacio que cuenta con una función de este estilo, se lo conoce como un espacio con producto interno o pre-Hilbert. Nótese que de la definición, se tiene que $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$, para todo $x \in E$.

Observación. Un espacio con producto interno es un espacio vectorial normado con la norma inducida

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Esto viene dado gracias a los siguientes teoremas.

Teorema 1.1: Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Sean E un espacio con producto interno y $x, y \in E$. Entonces

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Demostración. Si $y = 0$, el resultado es inmediato. Supongamos que $y \neq 0$, analicemos el caso real y complejo por separado.

- **Caso real:** definamos

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \|x - \alpha y\|^2, \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq f(\alpha) = \|x - \alpha y\|^2 &= \|x\|^2 - \alpha\langle x, y\rangle - \alpha\langle y, x\rangle + \alpha^2\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2\alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2\|y\|^2, \end{aligned}$$

así, se tiene que f es una función cuadrática que tiene máximo una raiz, por lo tanto, su discriminante debe ser mayor o igual que 0, es decir

$$\big(2\langle x, y\rangle\big)^2 \leq 4\|x\|^2\|y\|^2,$$

de donde,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

- **Caso complejo:** definamos

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \alpha &\longmapsto \|x - \alpha y\|^2, \end{aligned}$$

se tiene que

$$0 \leq f(\alpha) = \|x - \alpha y\|^2 = \|x\|^2 - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha\left(\langle y, x\rangle - \overline{\alpha}\|y\|^2\right).$$

Luego, tomando $\alpha = \frac{\overline{\langle y,x\rangle}}{\|y\|^2}$, se obtiene

$$0 \leq f\left(\frac{\overline{\langle y,x\rangle}}{\|y\|^2}\right) = \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2},$$

de donde, se deduce finalmente que $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. □

Teorema 1.2: Desigualdad Triangular

Sean E un espacio con producto interno y $x, y \in E$. Entonces

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Demostración. Utilizando el resultado anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= |\langle x+y, x+y\rangle| \\
&= \left|\|x\|^2 + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \|y\|^2\right| \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + |\langle y,x\rangle| + |\langle x,y\rangle| \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2,
\end{aligned}$$

luego $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. □

Con esto, se tiene que todos los resultados de espacios vectoriales normados y espacios métricos, se siguen cumpliendo en espacios con producto interno. Ahora veamos algunos ejemplos de este tipo de espacios.

Ejemplo 1.1.

1. En $\mathbb{R}^n$, para dos elementos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, se tiene el producto escalar usual

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

con norma asociada $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

2. En $\mathbb{C}^n$, se tiene el análogo al anterior, pero tomando conjugados en la

segunda componente, es decir

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

3. En $\ell^2(\mathbb{C}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{i=0}^{+\infty} x_n^2 < +\infty \right\}$, con

$$\langle x, y\rangle = \big\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \big\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{y_n}.$$

4. En $\mathscr{L}^2[a,b] = \left\{ f\colon [a,b] \to \mathbb{R} : \int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty \right\} = \overline{C[a,b]}$, con

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Veamos ahora, una propiedad de la norma que se cumple en los espacios con producto interno.

PROPOSICIÓN 1.3 (Igualdad del paralelogramo)**.** Sea E un espacio con producto interno, para todo $x, y \in E$ se tiene que

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Demostración. Sean $x, y \in E$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle + \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&\quad + \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).
\end{aligned}$$ □

Esta última proposición nos ayuda a demostrar que no todo espacio normado proviene de un producto interno, observemos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.2 (Espacio normado que no proviene de un producto interno)**.** En $\ell^p(\mathbb{C})$ sean $x = (1, 1, 0, 0, \ldots)$, $y = (1, -1, 0, 0, \ldots)$. Se tiene que

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 = 2^{2/p},$$

además
$$\|x+y\|^2 = 4 \qquad \text{y} \qquad \|x-y\|^2 = 4.$$
Por lo tanto,
$$2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 2(2 \cdot 2^{2/p}) = 4 \cdot 2^{2/p}.$$
y
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 8.$$
Luego
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),$$
solamente si $p = 2$. Es decir, si $p \neq 2$ entonces $\ell^p(\mathbb{C})$ no es un espacio con producto interno.

DEFINICIÓN 1.2: Espacio de Hilbert

Sea E un espacio con producto interno, si E, con la norma inducida, es un espacio de Banach, entonces E se dice un espacio de Hilbert.

Es decir, un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno completo. Con esta definición, se tiene que, todas la propiedades de espacios de Banach también son aplicables a los espacios de Hilbert.

En el caso real, a los espacios con producto interno, se los suele llamar *espacios euclideos*, esto es debido a que en estos espacios se puede realizar un tipo de geometría. Para esto, se necesita la noción de ángulo entre vectores, y más específico, la noción de perpendicularidad u ortogonalidad.

DEFINICIÓN 1.3: Ortogonalidad

Sean E un espacio con producto interno y $x, y \in E$. Si $\langle x, y\rangle = 0$, se dice que x y y son ortogonales*; y se nota*
$$x \perp y.$$

Partiendo de esta definición, se tiene el siguiente resultado que generaliza el Teorema de Pitágoras.

PROPOSICIÓN 1.4 (Teorema de Pitágoras)**.** Sean E un espacio con producto interno y $x, y \in E$.

a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, se tiene que

$$x \perp y \quad \text{si y solo si} \quad \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2.$$

b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se tiene que

$$x \perp y \quad \text{implica} \quad \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2.$$

Demostración. Supongamos que $x \perp y$, es decir, $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = 0$, con esto, se tiene que

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Recíprocamente, para el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$, se tiene que

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \|x+y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle,$$

por lo tanto,

$$\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = 0,$$

dado que $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} = \langle y, x\rangle$, se concluye que

$$2\langle x, y\rangle = 0,$$

es decir, $x \perp y$. □

Podemos ampliar la definición de elementos ortogonales a un conjunto con una cantidad arbitraria de elementos, con la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.4: Conjunto ortogonal

Sea E un espacio con producto interno y $M \subseteq E \setminus \{0\}$. Se dice que M es ortogonal *si para todo par de elementos x, y en M, tales que $x \neq y$, se tiene que $x \perp y$.*

EJEMPLO 1.3. En $\ell^2(\mathbb{C})$, se puede demostrar fácilmente que el conjunto

$$M = \left\{(\delta_n^m)_{n\in\mathbb{N}} : m \in \mathbb{N}\right\},$$

es ortogonal, con δ_n^m la función la delta de Kronecker, es decir,

$$\delta_n^m = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

De aquí, se obtienen las siguientes propiedades.

PROPOSICIÓN 1.5. Sean E un espacio con producto interno y M un conjunto ortogonal, entonces M es linealmente independiente.

Demostración. Sean $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0.$$

Entonces, para $i \in [\![1, n]\!]$

$$0 = \langle x_i, 0 \rangle = \left\langle x_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j} \langle x_i, x_j \rangle = \overline{\lambda_i} \langle x_i, x_i \rangle.$$

Por lo tanto, $\lambda_i = 0$ para todo $i \in [\![1, n]\!]$. □

Otra propiedad importante que vale señalar es que el vector cero es ortogonal a todo el espacio, pero, además es el único vector con esta propiedad, esto viene dado por la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.6. Sean E un espacio con producto interno y $x \in E$ tal que $\langle x, y \rangle = 0$, para todo $y \in E$. Entonces $x = 0$.

Demostración. En particular se tiene que $x \in E$ y por ende $\langle x, x \rangle = 0$, de donde $x = 0$. □

COROLARIO 1.7. Sean E un espacio con producto interno y $u, v \in E$ tales que $\langle u, x \rangle = \langle v, x \rangle$ para todo $x \in E$. Entonces $u = v$.

Este último resultado se sigue inmediatamente de la proposición anterior. Por otro lado, se tiene que un producto escalar, siempre es una función continua, para lo cual se utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

TEOREMA 1.8

En un espacio con producto interno el producto interno es continuo. Es decir, si $x_n \to x$, $y_n \to y$, cuando $n \to +\infty$, entonces $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$, cuando $n \to +\infty$.

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\|. \end{aligned}$$

Como $\|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \to \|x\| \|y - y\| + \|x - x\| \|y\| = 0$, cuando $n \to +\infty$, entonces

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \to 0,$$

cuando $n \to +\infty$; es decir, $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$, cuando $n \to +\infty$. □

Se puede ampliar la definición de subespacio vectorial en espacios con producto interno de la siguiente manera

DEFINICIÓN 1.5

Sean E espacio con producto interno y $F \subseteq E$, subespacio vectorial. Entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle_F \colon F \times F \to \mathbb{K}$ es un producto interno en F, por lo tanto a F se lo denomina subespacio con producto interno *de E.*

Esta definición también se la puede ver como una extensión de subespacio vectorial normado, por lo tanto, se siguen cumpliendo todas las propiedades sobre estos, es decir, se tienen los siguientes resultados.

PROPOSICIÓN 1.9.

1. Sea H un espacio de Hilbert y $F \subseteq H$ un subespacio vectorial, entonces F es cerrado si y solo si F es un espacio de Hilbert.

2. Sea H espacio con producto interno de dimensión finita, entonces H es Hilbert.

La demostración de esta proposición es idéntica al caso de espacios normados. Por otro lado, se tienen las siguientes propiedades adicionales de la continuidad.

PROPOSICIÓN 1.10. Sea E un espacio con producto interno.

1. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E y $y \in E$ tal que $x_n \perp y$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \to x$, con $x \in E$. Entonces $x \perp y$.
2. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E y $x \in E$ tal que $\|x_n\| \to \|x\|$ y $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$. Entonces $x_n \to x$.

Demostración.

1. Sabemos que $x_n \perp y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $(\langle x_n, y\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión contante 0, por lo tanto $\langle x_n, y\rangle \to 0$. Por otro lado, por continuidad de producto interno se tiene que $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$. Por lo tanto $\langle x, y\rangle = 0$.
2. Se tiene que
$$\begin{aligned}\|x_n - x\|^2 &= \|x_n\|^2 - \langle x_n, x\rangle - \langle x, x_n\rangle + \|x\|^2\\ &\to \|x\|^2 - \langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle + \|x\|^2 = 0.\end{aligned}$$
Por lo tanto, $x_n \to x$. □

1.2. Complementos ortogonales y sumas directas

La primera parte de esta sección, se basa en resolver el problema de existencia y unicidad de un elemento que minimice la distancia entre un conjunto y un punto dado. Para esto, se necesitan ciertas restricciones sobre el conjunto, una de ellas será la convexidad.

DEFINICIÓN 1.6: Conjunto convexo

Sea E un espacio vectorial normado, decimos que M es convexo *si para todo $x, y \in M$ y todo $\alpha \in [0, 1]$ se tiene que $x - \alpha(x - y) \in M$.*

Con esta definición, se tiene el siguiente resultado que indica la existencia y unicidad del elemento buscado, al cual llamaremos *proyección*.

TEOREMA 1.11: Proyección sobre un convexo, cerrado y no vacío

Sean H un espacio con producto interno, $M \neq \varnothing$ un convexo y completo.

> *Entonces, dado $x \in H$, existe un único $y \in M$ tal que*
>
> $$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\| = \|x - y\|.$$

Demostración. Sabemos que existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en M tal que $\|x - y_n\| = \delta_n \to \delta$. Con esto, demostraremos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Sea $v_n = x - y_n$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= \|y_n - x + x - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2 \\ &= -\|v_n + v_m\|^2 + 2\big(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2\big) \\ &= -\|v_n + v_m\|^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2).\end{aligned}$$

Además

$$\|v_n + v_m\| = \|y_n + y_m + 2x\| = 2\left\|\frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_m - x\right\| \geq 2\delta$$

pues $\frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_m \in M$. Luego

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq -4\delta^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2) \to -4\delta^2 + 4\delta^2 = 0.$$

Entonces $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como M es completo, existe $y \in M$ tal que $y_n \to y$.

Por otro lado, $\|x - y\| = \delta$. En efecto, como $y \in M$, entonces

$$\|y - x\| \geq \delta.$$

Pero

$$\begin{aligned}\|y - x\| &\leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| \\ &= \delta_n + \|y_n - y\| \\ &\to \delta + 0 = \delta.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|x - y\| = \delta$.

Finalmente, supongamos que existe $\tilde{y} \in M$ tal que $\|\tilde{y} - x\| = \delta$, utilizando la igualdad del paralelogramo, se tiene que

$$\begin{aligned}\|\tilde{y} - y\|^2 &= \|(\tilde{y} - x) - (y - x)\|^2 \\ &= 2\|\tilde{y} - x\|^2 + 2\|y - x\|^2 - \|y + \tilde{y} + 2x\|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\delta^2 - 2^2 \left\| \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\tilde{y} - x \right\|^2 \\
&\leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0,
\end{aligned}
$$

pues $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\tilde{y} \in M$. Por lo tanto, $y = \tilde{y}$. □

En el teorema, a y se lo conoce como la proyección de x en M, se lo suele notar por $P_M(x)$. Si M es además un espacio vectorial, se tiene condiciones de ortogonalidad.

> **LEMA 1.12.** En el teorema anterior, si M es un subespacio vectorial, entonces $z = x - y$ es ortogonal a M.

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $y_1 \in M$ tal que $\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0$ de donde, se tiene que $y_1 \neq 0$.

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|z - \alpha y\|^2 &= \|z\|^2 - \overline{\alpha}\langle z, y_1 \rangle - \alpha \left(\langle y_1, z \rangle - \overline{\alpha}\|y_1\|^2 \right) \\
&= \|z\|^2 - \overline{\alpha}\beta - \alpha \left(\overline{\beta} - \overline{\alpha}\|y_1\|^2 \right),
\end{aligned}
$$

tomando $\overline{\alpha} = \frac{\langle y_1, z \rangle}{\|y_1\|^2} = \frac{\overline{\beta}}{\|y_1\|^2}$ se tiene que

$$
\|z - \alpha y\|^2 = \|z\|^2 - \frac{\overline{\beta}\beta}{\|y_1\|^2} = \delta^2 - \frac{|\beta|}{\|y_1\|^2} < \delta^2.
$$

Por otro lado, se tiene que $y_1 + \alpha y_1 \in M$, por lo tanto

$$
\|z - \alpha y_1\| = \|x - y_1 - \alpha y_1\| = \|(y_1 + \alpha y_1) - x\| \geq \delta,
$$

lo cual es contradictorio, entonces

$$
z \perp M.
$$

□

El objetivo de estos resultados es expresar un espacio de Hilbert como suma directa, lo cual es particularmente simple utilizando el concepto de ortogonalidad, para esto, primero tenemos las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 1.7: Suma directa

Sea E un espacio vectorial, se dice que es suma directa *de F y G y se nota*

$$E = F \oplus G,$$

si para todo $x \in E$, existen únicos $y \in F$ y $z \in G$ tales que $x = y + z$.

Recordemos que una condición necesaria y suficiente para que E sea suma directa de F y G es que $E = F + G$ y $F \cap G = \{0\}$.

DEFINICIÓN 1.8: Complemento ortogonal

Sean E un espacio con producto interno y $M \subseteq E$. El complemento ortogonal *de M se define por*

$$M^{\perp} = \{y \in E : y \perp x \text{ para todo } x \in M\}.$$

Con esto, se tiene los siguientes resultados.

PROPOSICIÓN 1.13. Sean E un espacio con producto interno y $M \subseteq E$, entonces

1. $M^{\perp}$ es un subespacio vectorial,
2. $M^{\perp}$ es un conjunto cerrado, y
3. $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

Demostración.

1. Es claro que $0 \in M^{\perp}$ pues $0 \perp x$ para todo $x \in M$. Ahora, sean $x, y \in M^{\perp}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $z \in M$, se tiene que

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle = 0.$$

2. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $M^{\perp}$ tal que $x_n \to x$ y $z \in M$. Se tiene que $\langle x_n, z \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, además

$$\langle x_n, z \rangle \to \langle x, z \rangle,$$

por lo tanto, $\langle x, z \rangle = 0$, es decir, $x \in M^{\perp}$.

3. Sea $x \in M \cap M^{\perp}$, se tiene que $x \in M^{\perp}$ y $x \in M$, por lo tanto, $\langle x, z\rangle = 0$, de donde, $x = 0$. $\square$

OBSERVACIÓN. En general se tienen las siguientes relaciones:

$$M \subsetneq \left(M^{\perp}\right)^{\perp} \neq M,$$

pero

$$\left(\left(M^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = M^{\perp}.$$

Con esto, se tiene el siguiente resultado que muestra que un espacio de Hilbert siempre puede ser expresado como suma de un espacio cerrado y su complemento ortogonal.

TEOREMA 1.14

Sean H un espacio de Hilbert y $F \subsetneq H$ subespacio vectorial cerrado. Entonces

$$H = F \oplus F^{\perp}.$$

Demostración. F es completo, convexo y no vacío, por lo tanto, para $x \in H$, existe $y \in F$ tal que $\|x - y\| = d(x, F)$. Además $z = x - y \in F^{\perp}$. Luego $x = y + z$ con $y \in F$ y $z \in F^{\perp}$; entonces $H = F + F^{\perp}$. Además, $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, por lo tanto

$$H = F \oplus F^{\perp}.$$ $\square$

Gracias a este resultado, se logra dar una caracterización sencilla de los conjuntos densos de un espacio de Hilbert, para lo cual se tiene los siguientes resultados.

LEMA 1.15. Sea H un espacio de Hilbert y $F \subsetneq H$ subespacio vectorial cerrado. Entonces $F^{\perp\perp} = F$.

Demostración. Sea $x \in F$, se tiene que $\langle x, y\rangle = 0$, para todo $y \in F^{\perp}$, es decir, $x \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Por otro lado, sea $x \in F^{\perp\perp} \subsetneq H = F \oplus F^{\perp}$. Entonces $x = y + z$ con $y \in F$ y $z \in F^{\perp}$. Luego $z = y - x \in F^{\perp\perp}$, pues $F \subsetneq F^{\perp\perp}$, de donde $z \in F^{\perp\perp} \cap F^{\perp}$, lo cual implica que $z = 0$ y entonces $x = y \in F$. $\square$

Antes de continuar, recordemos la definición de conjunto generado.

DEFINICIÓN 1.9

Sean E un espacio vectorial y $M \subseteq E$. Decimos que el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de M o el subespacio vectorial generado *por M es*

$$\langle M \rangle = \operatorname{span}(M) = \left\{ \sum_{v \in S} \alpha_v v : \alpha_v \in \mathbb{K}, S \subseteq M \text{ finito} \right\}.$$

TEOREMA 1.16

Sean H un espacio de Hilbert y $M \subseteq H$ no vacío. Entonces

$$\overline{\operatorname{span}(M)} = H \quad \text{si y solo si} \quad M^{\perp} = \{0\}.$$

Demostración. Sea $x \in M^{\perp} \subseteq H = \overline{\operatorname{span}(M)}$. Al ser la clausura de $\operatorname{span}(M)$, existe una sucesión $(x_n)_{n \in N}$ en $\operatorname{span}(M)$ tal que $x_n \to x$.

Como $x_n \in \operatorname{span}(M)$, entonces $x_n \perp x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $\langle x_n, x \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por continuidad, $\langle x, x \rangle = 0$. Entonces $x = 0$.

Recíprocamente, dado que $\overline{\operatorname{span}(M)} = F$ es un subespacio vectorial cerrado, entonces $H = F \oplus F^{\perp}$. Demostraremos que $F^{\perp} = \{0\}$.

Sean $x \in F^{\perp}$ y $y \in M \subseteq F$. Se tiene que $\langle x, y \rangle = 0$, por tanto $x \in M^{\perp} = \{0\}$ lo que es lo mismo que decir $x = 0$. Por lo tanto $F^{\perp} = \{0\}$. Así, se tiene que $H = F = \overline{\operatorname{span}(M)}$. $\square$

Como se mencionó anteriormente, este resultado es útil para demostrar la densidad de conjuntos en espacios de Hilbert, como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.4. En $\ell^2(\mathbb{C})$, sea $M = \left\{ (\delta_n^m)_{n \in \mathbb{N}} : m \in \mathbb{N} \right\}$ con δ_n^m la función la delta de Kronecker.

Tenemos que, para $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M^{\perp}$ y $m \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$0 = \left\langle (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\delta_n^m)_{n \in \mathbb{N}} \right\rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \delta_n^m = x_m.$$

Por lo tanto, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es la sucesión formada por ceros, es decir $M^{\perp} = \{0\}$. De aquí, se concluye que $H = \overline{\operatorname{span}(M)}$.

1.2.1. Conjuntos totales

DEFINICIÓN 1.10: Conjunto total

Sean E un espacio vectorial normado, $M \subseteq E$ se dice que es un conjunto total *si*

$$\overline{\operatorname{span}(M)} = E.$$

Si E es un espacio con producto interno y $M \subseteq E$ es un conjunto ortogonal y total, se dice que es un conjunto ortogonal total *(o* base ortogonal *o* base de Hilbert*).*

OBSERVACIÓN.

- Todo espacio de Hilbert no vacío tiene una base de Hilbert, esto se puede demostrar a partir del Lema de Zorn.
- Todas las bases de Hilbert de un espacio de Hilbert tienen la misma cardinalidad. A esta se la llama la *dimensión de Hilbert* del espacio.

A partir de esta definición, se toman los siguientes resultados sin demostración.

PROPOSICIÓN 1.17. Sea H un Hilbert. H es separable si y solo si $\dim_H(H) \leq \aleph_0$ (es decir, tiene base de Hilbert numerable).

EJEMPLO 1.5. En el ejemplo anterior, el conjunto $M = \left\{(\delta_n^m)_{n\in\mathbb{N}} : m \in \mathbb{N}\right\}$ cumple que $|M| = \aleph_0$. Y además $\overline{\operatorname{span}(M)} = \ell^2(\mathbb{C})$. Entonces $\ell^2(\mathbb{C})$ es separable.

DEFINICIÓN 1.11

Sean $H, \tilde{H}$ espacios con producto interno, $T\colon H \to \tilde{H}$ es un isomorfismo de espacios con producto interno *si T es lineal, biyectivo y para todo $x, y \in H$ se tiene*

$$\langle Tx, Ty\rangle_{\tilde{H}} = \langle x, y\rangle_H.$$

PROPOSICIÓN 1.18. Sean H y $\tilde{H}$ espacios de Hilbert. Entonces H y $\tilde{H}$ son isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión de Hilbert.

1.3. Teorema de representación de Riesz

En ocasiones, es de utilidad saber la forma que tienen los funcionales lineales de ciertos espacios; en el caso de espacios de Hilbert, esto resulta bastante simple. Primero, observemos que podemos definir fácilmente funcionales lineales en este tipo de espacios.

PROPOSICIÓN 1.19. Sean H un espacio de Hilbert y $z \in H$. Definimos

$$\begin{aligned} f_z \colon H &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto f_z(x) = \langle x, z \rangle. \end{aligned}$$

Se tiene que

1. $f_z \in H^* = \{f \colon H \to \mathbb{K} : f \text{ es lineal y acotado}\}$.
2. $\|f_z\|_{H^*} = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|} = \|z\|$.

Demostración.

1. Se tiene que f_z es lineal por la linealidad del producto interno en la primera componente. Además, se tiene que
$$|f_z(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|z\| \|x\|,$$
Por lo tanto $\|f_z\|_{H^*} \leq \|z\|$.
2. Por otro lado, $|f_z(z)| = |\langle z, z \rangle| = \|z\|^2 = \|z\| \|z\|$. Por tanto $\|f_z\|_{H^*} \geq \|z\|$. Con lo anterior se concluye que
$$\|f_z\|_{H^*} = \|z\|. \qquad \square$$

OBSERVACIÓN. Podemos definir

$$\begin{aligned} \rho \colon H &\longrightarrow H^* \\ x &\longmapsto \rho(x) = f_x. \end{aligned}$$

Por el resultado anterior, es claro que $\|\rho(x)\|_{H^*} = \|x\|$, lo cual haría que ρ sea una isometría (por ende, inyectiva). Además ρ es semilineal, es decir,

$$\rho(\alpha x) = \overline{\alpha} \rho(x).$$

El siguiente teorema, nos indica que los funcionales lineales de un espacio de Hilbert son únicamente de la forma dada en la proposición anterior.

TEOREMA 1.20: Teorema de representación de Riesz

Sean H un espacio de Hilbert y $f \in H^*$. Entonces existe un único $z \in H$ tal que

$$f(x) = \langle x, z \rangle,$$

para todo $x \in H$. Además $\|f\|_{H^*} = \|z\|$.

Demostración. Vamos a dividir la demostración en tres partes: existencia, unicidad e igualdad de normas.

- **Existencia:** Si $f = 0$, tomamos $z = 0$ y se tiene el resultado. Si $f \neq 0$, supongamos que ya tuviésemos el z buscado. En dicho caso

  $$\ker(f) = \{x \in H : f(x) = 0\} = \{x \in H : \langle x, z \rangle = 0\} = \{z\}^\perp,$$

  es decir, el z buscado es un elemento de $\ker(f)^\perp$. Teniendo esto en mente, procedamos a buscar este z. Sabemos que $\ker(f)$ es cerrado, entonces

  $$H = \ker(f) \oplus \ker(f)^\perp.$$

  Sea $z_0 \in \ker(f)^\perp$, como $\ker(f) \neq E$, se puede tomar $z_0 \neq 0$. Para $x \in H$, definamos

  $$u = f(x)z_0 - f(z_0)x,$$

  se tiene que

  $$f(u) = f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0,$$

  es decir, $u \in \ker(f)$, por lo tanto, es ortogonal a z_0, de donde

  $$\begin{aligned} 0 &= \langle u, z_0 \rangle \\ &= \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 \rangle \\ &= f(x)\langle z_0, z_0 \rangle - f(z_0)\langle x, z_0 \rangle, \end{aligned}$$

  por lo tanto,

  $$f(x) = \left\langle x, \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0 \right\rangle.$$

  Así, tomando $z = \dfrac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0$, se cumple que $f(x) = \langle x, z \rangle$, para todo $x \in H$.

- **Unicidad:** Supongamos que existe $\tilde{z} \in H$ tal que para todo $x \in H$

$$\langle x, \tilde{z} \rangle = f(x) = \langle x, z \rangle.$$

Luego $z = \tilde{z}$.

- **Norma:** Análogo a la proposición anterior, se tiene que $\|f\|_{H^*} = \|z\|$. □

De esta manera, se facilita bastante el estudio de los funcionales lineales, en particular, el estudio del espacio dual y bidual de un espacio de Hilbert, obteniendo el hecho que un espacio de Hilbert es siempre reflexivo. Para esto, recordemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.12: Espacio reflexivo

Sea E un espacio vectorial normado, se dice reflexivo *si*

$$\begin{aligned} \varphi\colon E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto \varphi(x), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi(x)\colon E^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto \varphi(x)(f) = f(x), \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Recordemos la función $\rho\colon H \to H^*$ definida en la página anterior. Gracias al Teorema de Representación de Riesz, esta función es sobreyectiva, es decir, es casi un isomorfismo entre un espacio de Hilber y su dual (en el caso que el cual se trabaje con el campo de los números reales, en efecto es un isomorfismo). Esto nos lleva a la idea de generar una función análoga entre el dual y el bidual. Para esto se necesitaría que el dual también sea un espacio de Hilbert, es decir, también su norma sea inducida por un producto interno. Esto se tiene gracias a la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.21. Sea H un espacio de Hilbert, la función

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^*}\colon H^* \times H^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (f, g) &\longmapsto \langle f, g \rangle_{H^*} = \langle v, u \rangle, \end{aligned}$$

donde $\rho(u) = f$ y $\rho(v) = g$ es un producto interno en H^*. Además, este producto induce la norma habitual del espacio, es decir, para $f \in H^*$

$$\left(\langle f, f\rangle_{H^*}\right)^{1/2} = \|f\|_{H^*} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Demostración. Para todo $f, g, h \in H^*$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que

- $\langle \alpha f + g, h\rangle_H^* = \langle w, \overline{\alpha} u + v\rangle = \alpha\langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle = \alpha\langle f, h\rangle_{H^*} + \langle g, h\rangle_{H^*}$.
- $\langle f, g\rangle = \langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle} = \overline{\langle g, f\rangle}_{H^*}$.
- $\langle f, f\rangle_{H^*} = \langle u, u\rangle = \|u\|^2 \geq 0$
- $\langle f, f\rangle_{H^*} = \langle u, u\rangle = 0$ si y solo si $u = 0$, lo cual es equivalente a $f = \rho(0)$ y
$$\langle \rho(0), g\rangle = \langle v, 0\rangle = 0,$$
para todo $g \in H^*$. Luego $\rho(0)(y) = \langle y, 0\rangle = 0$. Por tanto $f = 0$.

Por último, veamos que

$$\langle f, f\rangle_{H^*}^{1/2} = \|f\|_{H^*} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Tenemos directamente que

$$\langle f, f\rangle_{H^*}^{1/2} = \langle u, u\rangle^{1/2} = \|u\| = \|f\|_{H^*}.$$

Entonces H^* es Hilbert. □

TEOREMA 1.22

Si H es un espacio de Hilbert, entonces es reflexivo.

Demostración. Gracias a que H es un espacio de Hilbert, por el Teorema de Representación de Riesz se tiene que la función

$$\begin{aligned} \rho\colon H &\longrightarrow H^* \\ x &\longmapsto \rho(x), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \rho(x)\colon H &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y &\longmapsto \rho(x)(y) = \langle y, x\rangle, \end{aligned}$$

es una función semilineal, biyectiva e isométrica.

Por otro lado, ya que H^* es un espacio con producto interno, y además completo, se tiene que es un espacio de Hilbert, y de igual forma que lo anterior, la función

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}\colon H^* &\longrightarrow H^{**} \\ f &\longmapsto \tilde{\rho}(f), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(f)\colon H^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y &\longmapsto \tilde{\rho}(f)(g) = \langle g, f\rangle, \end{aligned}$$

es una función semilineal, biyectiva e isométrica. Por lo tanto, $\tilde{\rho}\circ\rho$ es una función lineal, biyectiva e isométrica, es decir, un isomorfismo entre H y su bidual. Por otro lado,

$$\big((\tilde{\rho}\circ\rho)(x)\big)(f) = \Big(\tilde{\rho}\big(\rho(x)\big)\Big)(f) = \big\langle f, \rho(x)\big\rangle_{H^*}.$$

Sea $u \in H$ el elemento tal que $\rho(u) = f$, se tiene que

$$\big((\tilde{\rho}\circ\rho)(x)\big)(f) = \big\langle \rho(u), \rho(x)\big\rangle_{H^*} = \langle x, u\rangle = f(x),$$

es decir $\tilde{\rho}\circ\rho = \varphi$. Por lo tanto H es reflexivo. □

1.4. Tópicos adicionales

1.4.1. Propiedades de la Proyección

Para esto, será preciso extender el resultado del Teorema de la proyección sobre un convexo, cerrado y no vacío. En lo que sigue de la sección, H representará un espacio de Hilbert y K un subconjunto convexo, cerrado y no vacío, por lo tanto, para $x \in H$, el teorema antes mencionado, garantiza la existencia de un único elemento en K que minimiza la distancia entre x y K, a este elemento se lo notará por $P_K(x)$. Con esto, se tiene las siguiente propiedades.

PROPOSICIÓN 1.23. Sean H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, $K \subseteq H$ convexo, cerrado y no vacío, entonces, para cada $x \in H$ se tiene $y = P_K(x)$ si y sólo si $y \in K$ y para todo $u \in K$ se cumple

$$\langle x - y, u - y\rangle \leq 0.$$

Demostración. Sean $x \in H$, $u \in K$ y $t \in [0, 1]$. Supongamos que $y = P_K(x)$, entonces $v = (1-t)y + tu \in K$, y por la minimalidad de y tenemos

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 \leq \|x-v\|^2 &= \big\|x - \big((1-t)y + tu\big)\big\|^2 \\ &= \big\|(x-y) - t(u-y)\big\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 - 2t\langle x-y, u-y\rangle + t^2\|u-y\|^2,\end{aligned}$$

de donde, $2\langle x-y, u-y\rangle \leq t\|u-y\|^2$. Haciendo tender t hacia 0, se sigue que

$$\langle x-y, u-y\rangle \leq 0.$$

Recíprocamente, supongamos que $y \in K$ y para todo $u \in K$ se cumple

$$\langle x-y, u-y\rangle \leq 0,$$

entonces, si $u \in K$,

$$\|u-x\|^2 = \|(u-y)-(x-y)\|^2 = \|u-y\|^2 - 2\langle x-y, u-y\rangle + \|x-y\|^2,$$

con lo cual

$$\|x-y\|^2 - \|u-x\|^2 = 2\langle x-y, u-y\rangle - \|y-u\|^2 \leq 0,$$

de donde, $\|x-y\| \leq \|u-x\|$ y dado que $y \in K$, se sigue que

$$\|x-y\| = \min_{u\in K} \|u-x\|. \qquad \square$$

PROPOSICIÓN 1.24. Sea H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y $K \subseteq H$ un subconjunto convexo, cerrado y no vacío, entonces para cada $x, y \in H$ se verifica

$$\|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x-y\|.$$

Demostración. Dado que $P_K(x)$ y $P_K(y)$ son elementos de K, por la proposición anterior se tiene que

$$\big\langle x - P_K(x), P_K(y) - P_K(x)\big\rangle \leq 0 \qquad \text{y} \qquad \big\langle y - P_K(y), P_K(x) - P_K(x)\big\rangle \leq 0.$$

Sumando estas desigualdades, se obtiene que

$$\big\langle (x-y) - (P_K(x) - P_K(y)), P_K(y) - P_K(x)\big\rangle \leq 0,$$

de donde
$$\|P_K(y) - P_K(x)\|^2 \leq \langle y - x, P_K(y) - P_K(x) \rangle,$$
y por Cauchy Swartz, se obtiene finalmente que
$$\|P_K(y) - P_K(x)\|^2 \leq \|y - x\| \|P_K(y) - P_K(x)\|,$$
que equivale a
$$\|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x - y\|.$$
□

Estas últimas propiedades nos dan una caracterización de la proyección y nos señalan que la proyección no incrementa distancias.

1.4.2. Formas Bilineales y Sesquilineales

Ahora, se presentan algunas definiciones necesarias para la demostración del Teorema de Stampacchia.

DEFINICIÓN 1.13: Formas sesquilineales y bilineales

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $h\colon E \times F \to \mathbb{K}$ una función. Se dice que h es una forma sesquilineal *si para todo $x, y \in E$, todo $u, v \in F$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene*

- *linealidad en la primera componente, es decir*
$$h(x + y, u) = h(x, u) + h(y, u) \qquad y \qquad h(\alpha x, u) = \alpha h(x, u),$$
- *semilinealidad en la segunda componente, es decir*
$$h(x, u + v) = h(x, u) + h(x, v) \qquad y \qquad h(x, \alpha u) = \overline{\alpha} h(x, u)$$

Si, en cambio, se tiene linealidad en ambas componentes, se dice que h es una forma bilineal.

Si además $E = F$, h es una forma sesquilineal, y para todo $x, y \in E$ se tiene
$$h(x, y) = \overline{h(y, x)},$$
se dice que h es una *forma hermitiana*, y si
$$h(x, y) = h(y, x),$$

se dice que h es una *forma simétrica*.

DEFINICIÓN 1.14: Formas defindas positivas

Una forma hermitiana h sobre un espacio vectorial E se dice

- semidefinida positiva *si para todo $x \in E$ se tiene $h(x,x) \geq 0$,*
- definida positiva *si para todo $x \in E \setminus \{0\}$ se tiene $h(x,x) > 0$.*

A raíz de esto, es claro que una función $h\colon E \times E \to \mathbb{C}$ define un producto escalar si y sólo si es una forma sesquilineal hermitiana definida positiva.

DEFINICIÓN 1.15: Formas acotadas y coersivas

Sean E_1 y E_2 espacios vectoriales normados, una forma sesquilineal h sobre E se dice

- acotada*, si existe $M > 0$ tal que para todo $x \in E_1$, $y \in E_2$ se tiene*
$$\big|h(x,y)\big| \leq M\|x\|_1\|y\|_2,$$
- coerciva*, si $E_1 = E_2$ y existe $L > 0$ tal que para todo $x \in E_1$ se tiene*
$$h(x,x) \geq L\|x\|^2.$$

Gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz es fácil notar que todo producto interior es una forma sesquilineal acotada, y además es coerciva, pues $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$. Por otro lado, es claro que si una forma sesquilineal es coerciva, entonces es definida positiva.

Consideremos E_1 y E_2 espacios vectoriales y h una forma sesquilineal acotada sobre $E \times F$, esto significa que el conjunto de los números de la forma
$$\frac{\big|h(x,y)\big|}{\|x\|_1\|y\|_2},$$
con $x \in E_1 \setminus \{0\}$ $y \in E_2 \setminus \{0\}$, es un conjunto acotado y por lo tanto tiene supremo, eso nos permite definir el número $\|h\|$, al que llamaremos norma de h, del siguiente modo
$$\|h\| = \sup_{\substack{x \in E_1 \setminus \{0\} \\ y \in E_2 \setminus \{0\}}} \frac{|h(x,y)|}{\|x\|_1\|y\|_2}.$$

O, de manera análoga, podemos obtener la siguiente fórmula:

$$\|h\| = \sup_{\substack{\|x\|_1=1\\ \|y\|_2=1}} |h(x,y)|.$$

Además se verifica que $|h(x,y)| \leq \|h\|\|x\|_1\|y\|_2$. Esto será útil en lo posterior. Por otro lado, es fácil ver, y se lo deja como ejercicio, que una forma hermitiana coerciva define un producto escalar sobre el espacio. Finalmente, si se exige acotación, se tiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.25. Sea $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espacio con producto interno y h una forma hermitiana acotada y coerciva sobre H. Las normas

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2},$$

para todo $x \in H$ y

$$\|x\|_h = h(x,x)^{1/2},$$

para todo $x \in H$, son equivalentes. Por lo tanto, si $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ es de Hilbert, entonces (H, h) también es de Hilbert.

Demostración. Por la acotación y coercividad de h, existen constantes $L, M > 0$ tales que para todo $x, y \in H$ se tiene

$$|h(x,y)| \leq M\|x\|\|y\| \qquad \text{y} \qquad h(x,x) \geq L\|x\|^2.$$

En particular, para cada $x \in H$ tenemos que

$$L\|x\|^2 \leq h(x,x) \leq M\|x\|^2,$$

de donde

$$\sqrt{L}\|x\| \leq \|x\|_h \leq \sqrt{M}\|x\|,$$

es decir, estas normas son equivalentes. Por otro lado, sabemos que normas equivalentes preservan la completitud del espacio, por lo tanto (H, h) es de Hilbert. □

1.4.3. Segunda forma del Teorema de Representación de Riesz

Aquí, extenderemos el resultado del Teorema de Representación de Riesz para formas sesquilineales.

TEOREMA 1.26: Segundo Teorema de Representación de Riesz

Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert y h una forma sesquilineal acotada sobre $H_1 \times H_2$. Existe un único operador lineal $S\colon H_1 \to H_2$ tal que

$$h(x,y) = \langle S(x), y \rangle$$

para todo $x \in H_1$ y $y \in H_2$; además

$$\|h\| = \|S\|.$$

Demostración. Para $x \in H_1$, definamos el operador

$$\begin{aligned} f_x\colon H_2 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y &\longmapsto f_x(y) = \overline{h(x,y)}. \end{aligned}$$

Puesto que h es sesquilineal, se tiene que f_x es lineal, además,

$$\left|f_x(y)\right| = \left|\overline{h(x,y)}\right| = \left|h(x,y)\right| \leq \left(M\|x\|_1\right)\|y\|_2,$$

es decir, f_x es acotado.

Con esto, como $f_x \in H_2^*$, utilizando el Teorema de Representación de Riesz, existe un único $z \in H_2$ tal que

$$f_x(y) = \langle y, z \rangle_2.$$

Puesto que z está relacionado con x y es el único que guarda esta relación, se puede definir

$$\begin{aligned} S\colon H_1 &\longrightarrow H_2 \\ x &\longmapsto S(x), \end{aligned}$$

donde $S(x)$ es tal que

$$\overline{h(x,y)} = f_x(y) = \left\langle y, S(x) \right\rangle_2,$$

por lo tanto

$$h(x,y) = \left\langle S(x), y \right\rangle_2.$$

Por otro lado, S es lineal, pues sean $u, v \in H_1$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, se tiene que, para $y \in H_2$

$$\begin{aligned} \left\langle S(\alpha u + \beta v), y \right\rangle_2 &= h(\alpha u + \beta v, y) \\ &= \alpha h(u,y) + \beta h(v,y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha\big\langle S(u), y\big\rangle_2 + \beta\big\langle S(v), y\big\rangle_2 \\
&= \big\langle \alpha S(u) + \beta S(v), y\big\rangle_2.
\end{aligned}
$$

Como esto se cumple para todo $y \in H_2$, se tiene que $S(\alpha u + \beta v) = \alpha S(u) + \beta S(v)$. Es decir, S es lineal.

Además, se tiene que

$$\Big(\big\|S(x)\big\|_2\Big)^2 = \Big|\big\langle S(x), S(x)\big\rangle\Big| = \big|h\big(x, S(x)\big)\big| \leq M\|x\|_1\big\|S(x)\big\|_2,$$

de donde, si $S(x) \neq 0$, se tiene que

$$\big\|S(x)\big\|_2 \leq M\|x\|_1.$$

Dado que esta última desigualdad se sigue cumpliendo si $S(x) = 0$, se tiene que S es acotado.

Finalmente, para probar la unicidad, supongamos que $T\colon H_1 \to H_2$ es un operador que también verifica $h(x, y) = \langle T(x), y\rangle$, entonces

$$\big\langle S(x), y\big\rangle = \big\langle T(x), y\big\rangle$$

para todo $x \in H_1$ y $y \in H_2$, esto significa que $S(x) = T(x)$ para todo $x \in H_1$, de donde $S = T$. $\square$

1.4.4. Teoremas de Stampacchia y Lax-Milgram

A continuación daremos la los Teoremas de Stampacchia y Lax-Milgram, los cuales son resultados importantes que se tiene de los espacios de Hilbert, estos tienen especial aplicación en las Ecuaciones en Derivadas Parciales al momento de demostrar existencia y unicidad de soluciones para cierto tipo de ecuaciones.

TEOREMA 1.27: Teorema de Stampacchia

Sean H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$; $K \subseteq H$ un cerrado, convexo y no vacío; y h una forma bilineal acotada y coerciva sobre H. Entonces, para todo $f \in H^*$ existe un único $y \in K$ tal que

$$h(y, x - y) \geq f(x - y),$$

para todo $x \in K$. Además, si h es simétrica, el elemento y está caracteriza-

> *do por la propiedad*
>
> $$y \in K \quad y \quad \frac{1}{2}h(y,y) - f(y) = \min_{x \in K} \left\{ \frac{1}{2}h(x,x) - f(x) \right\}.$$

Demostración. Por el Teorema de Representación de Riesz, existe un único $z \in H$ tal que

$$f(u) = \langle u, z \rangle = \langle z, u \rangle,$$

para todo $u \in H$. Por otro lado, puesto que h es bilineal y acotada, por el Segundo Teorema de Representación de Riesz, existe un único operador lineal $S \colon H \to H$ tal que

$$h(u,v) = \big\langle S(u), v \big\rangle,$$

para todo $v \in H$. Además, por la continuidad de S, existe $M > 0$ tal quedar

$$\big\| S(u) \big\| \leq M \|u\|,$$

para todo $u \in H$; y por la coercividad de h, existe $L > 0$ tal que

$$\big\langle S(u), u \big\rangle = h(u,u) \geq L\|u\|^2,$$

para todo $u \in H$.

Con estas consideraciones, nuestro problema se transforma en encontrar $y \in K$ tal que

$$\big\langle S(y), x - y \big\rangle \geq \langle z, x - y \rangle,$$

para todo $x \in K$. Sean $\alpha > 0$ una constante a determinar y $u, v \in H$, se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
\big\langle S(u), v - u \big\rangle \geq \langle z, v - u \rangle &\iff \langle z, v - u \rangle - \big\langle S(u), v - u \big\rangle \leq 0 \\
&\iff \big\langle z - S(u), v - u \big\rangle \leq 0 \\
&\iff \alpha \big\langle z - S(u), v - u \big\rangle \leq 0 \\
&\iff \big\langle \alpha z - \alpha S(u), v - u \big\rangle \leq 0 \\
&\iff \Big\langle \big(\alpha z - \alpha S(u) + u\big) - u, v - u \Big\rangle \leq 0.
\end{aligned}$$

Es decir, nuestro problema equivale a encontrar $y \in K$ tal que

$$\Big\langle \big(\alpha z - \alpha S(y) + y\big) - y, x - y \Big\rangle \leq 0$$

para todo $x \in K$. Por la Proposición 1.23, esto equivale a encontrar $y \in H$ tal

que
$$y = P_K\big(\alpha z - \alpha S(y) + y\big).$$
Si definimos $\phi\colon H \to H$ por $\phi(u) = P_K\big(\alpha z - \alpha S(u) + u\big)$, nuestro problema se traduce a encontrar $y \in H$ tal que $y = \phi(y)$, es decir, encontrar un punto fijo de ϕ.

Dado que H es un espacio completo, gracias al Teorema del Punto Fijo de Banach, podemos garantizar la existencia de un punto fijo de ϕ en el caso que ϕ sea una contracción. Por lo tanto, buscaremos un α adecuado para que esto se dé.

Dado que la proyección no incrementa distancias, se tiene que
$$\begin{aligned}\big\|\phi(u) - \phi(v)\big\| &= \Big\|P_K\big(\alpha z - \alpha S(u) + u\big) - P_K\big(\alpha z - \alpha S(v) + v\big)\Big\| \\ &\leq \big\|\alpha z - \alpha S(u) + u - \alpha z - \alpha S(v) + v\big\| \\ &= \big\|(u-v) - \alpha S(u-v)\big\|.\end{aligned}$$
Recordando las propiedades que observamos del operador S, se tiene que
$$\begin{aligned}\big\|\phi(u) - \phi(v)\big\|^2 &\leq \big\|(u-v) - \alpha S(u-v)\big\|^2 \\ &= \|u-v\|^2 - 2\alpha\big\langle S(u-v), u-v\big\rangle + \alpha^2\big\|S(u-v)\big\|^2 \\ &\leq \|u-v\|^2 - 2\alpha L\|u-v\|^2 + \alpha^2 M^2\|u-v\|^2 \\ &= \|u-v\|^2(1 - 2\alpha L + \alpha^2 M^2).\end{aligned}$$
Tomando α de tal forma que $0 < \alpha < \frac{2\alpha}{C^2}$ se obtiene que ϕ es una contracción, por lo tanto, admite un único punto fijo, es decir, existe un único $y \in H$ tal que $y = \phi(y)$, lo cual, como vimos, equivale a que existe un único $y \in K$ tal que
$$h(y, x-y) \geq f(x-y),$$
para todo $x \in K$.

Supongamos ahora que h es simérica. Entonces, por la Proposición 1.25, la norma $\|\cdot\|_h$, definida por h, es equivalente a $\|\cdot\|$; además, (H, h) también es Hilbert. Aplicando el Teorema de Representación de Riesz, existe un único $w \in H$ tal que
$$f(u) = h(u, w) = h(w, u)$$
para todo $u \in H$. Por lo tanto, y cumple que
$$h(y, x-y) \geq h(w, x-y),$$

para todo $x \in K$, es decir,

$$h(w-y, x-y) \leq 0,$$

para todo $x \in K$, pero, por la Proposición 1.23, esto equivale a que $y = P_K(w)$ con la norma $\|\cdot\|_h$, es decir, y es tal que

$$\|w-y\|_h = \min_{x\in K} \|w-x\|_h,$$

pero esto equivale a

$$h(w,w) - 2h(w,y) + h(y,y) = \min_{x\in K} \{h(w,w) - 2h(w,x) + h(x,x)\},$$

puesto que $h(w,w)$ es constante y $f(u) = h(w,u)$ para todo $u \in H$, esto último equivale a

$$\frac{1}{2}h(y,y) - f(y) = \min_{x\in K} \left\{\frac{1}{2}h(x,x) - f(x)\right\},$$

es decir, y es tal que

$$h(y, x-y) \geq f(x-y),$$

para todo $x \in K$ si y solo si

$$y \in K \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}h(y,y) - f(y) = \min_{x\in K} \left\{\frac{1}{2}h(x,x) - f(x)\right\},$$

con lo cual completamos la demostración. □

Al considerar el caso $K = H$, se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 1.28: **Teorema de Lax-Milgram**

Sean H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y h una forma bilineal acotada y coerciva sobre H. Entonces, para todo $f \in H^*$ existe un único $y \in H$ tal que

$$h(y,x) = f(x),$$

para todo $x \in H$. Además, si h es simétrica, el elemento y está caracterizado por la propiedad

$$y \in K \quad y \quad \frac{1}{2}h(y,y) - f(y) = \min_{x\in K} \left\{\frac{1}{2}h(x,x) - f(x)\right\}.$$

Demostración. Como H es convexo, cerrado y no vacío, por el teorema anterior, existe un único $y \in H$ tal que

$$h(y, u - y) \geq f(u - y),$$

para todo $u \in H$. Sea $x \in H$, se tiene que

$$h\big(y, (x + y) - y\big) \geq f\big((x + y) - y\big) \quad \text{y} \quad h\big(y, (-x + y) - y\big) \geq f((-x + y) - y),$$

es decir,

$$h(y, x) \geq f(x) \quad \text{y} \quad -h(y, x) \geq -f(x),$$

por lo tanto, $h(y, x) = f(x)$. La segunda parte del resultado se la tiene directamente del teorema anterior. $\square$

1.5. Ejercicios propuestos

1. Identidad de la polarización. Sea E un espacio con producto interno complejo, para $x, y \in E$, demostrar que
$$\Re\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right),$$
$$\Im\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right).$$

2. Sean E un espacio con producto interno complejo, $T\colon E \to E$ una función lineal y acotada tal que $\langle Tu, u\rangle = 0$ para todo $u \in E$. Entonces $T = 0$.

3. Demostrar que el espacio vectorial E de todas las funciones continuas de una variable real en $[-1,1]$ es la suma directa del conjunto de todas las funciones pares con el de las funciones impares en $[-1,1]$.

4. Sean E un espacio con producto interno, M total en E. Si $\langle y, x\rangle = \langle v, x\rangle$, para todo $x \in M$, demostrar que $u = v$.

5. Sean H un espacio de Hilbert y $M \subseteq H$. Supongamos que para $v, w \in H$ arbitrarios se cumple que
$$\langle v, x\rangle = \langle w, x\rangle \quad \forall x \in M$$
implica $v = w$. Demostrar que M es total en H.

6. Sean E un espacio vectorial normado, $M \subseteq E$. Definimos el *aniquilador* de M por
$$M^a = \left\{f \in E^* : f(x) = 0,\ \forall x \in M\right\}.$$
Demostrar que M^a es subespacio vectorial cerrado de E^*.

7. Sean H un espacio de Hilbert, $\rho\colon H \to H^*$ el isomorfismo dado por el Teorema de Representación de Riesz, $M \subseteq H$. Entonces $\rho\left(M^\perp\right) = M^a$.

8. Sea E un espacio normado, demostrar que una forma hermitiana coerciva define un producto escalar sobre E.

9. Demostrar que $\mathcal{C}[0,1]$ con la norma $\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$ no proviene de un producto escalar.

10. Sea E un e.v. de dimensión finita. Demostrar que se puede definir un producto interno en este espacio.

11. Sean H un Hilbert, $M \subseteq H \setminus \varnothing$ convexo y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M tal que $\|x_n\| \to d$ con $d = \inf_{x\in M} \|x\|$. Mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en H.

12. Sean H un Hilbert y $M \subseteq H \setminus \varnothing$. Demostrar que $M^{\perp\perp}$ es el subespacio cerrado más pequeño que contiene a M.

13. Sean $S = \{e_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ un conjunto ortonormal e $y \in \operatorname{span}(S)$.

    a) Calcular α_i de $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

    b) Calcular $\|y\|$.

    c) Supongamos que estamos trabajando en E que es un espacio con producto interno. Sea $x \in E$, definamos $y = \sum \langle x, e_i\rangle e_i$, si $x = y + z$ demostrar que $y \perp z$.

    d) Determine la desigualdad de Bessel y la igualdad de Parseval.

1.6. Ejercicios resueltos

> **EJERCICIO 1.1.** Demostrar que en un espacio con producto escalar, $x \perp y$ si y solo si $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Demostración. Supongamos que $x \perp y$, sea $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene que

$$\|x + \alpha y\|^2 = \|x\|^2 + \alpha\langle y, x\rangle + \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2,$$

puesto que $\langle x, y\rangle = 0$, se tiene

$$\|x + \alpha y\|^2 = \|x\|^2 + |\alpha|^2\|y\|^2,$$

y dado que $|\alpha|^2\|y\|^2 \geq 0$, se concluye que $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$.

Por otro lado, supongamos que $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$. Si $y = 0$, se cumple directamente que $x \perp y$. Si $y \neq 0$, nótese que

$$\|x\|^2 \leq \|x + \alpha y\|^2 = \|x\|^2 + \alpha\langle y, x\rangle + \overline{\alpha}(\langle x, y\rangle + \alpha\|y\|^2),$$

para todo $\alpha \in \mathbb{K}$. Ahora, dado que $\|y\| \neq 0$, tomando $\alpha = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$, se tiene que

$$\|x\|^2 \leq \|x\|^2 - \frac{|\langle y, x\rangle|^2}{\|y\|^2},$$

por lo tanto, $|\langle y, x\rangle| \leq 0$, de donde, $\langle y, x\rangle = 0$, es decir, $x \perp y$. $\square$

> **EJERCICIO 1.2.** Sean M, N subespacios de un espacio de Hilbert H tales que $H = M \oplus N$. ¿Es cierto que $N = M^{\perp}$? (Demostrar o dar un contra ejemplo).

Solución. No es cierto, por ejemplo, sea $H = \mathbb{R}^2$ con el producto usual (con el cual, dado que tiene dimensión finita, es completo, por lo tanto Hilbert), $M = \operatorname{span}\big((1,0)\big)$, y $N = \operatorname{span}\big((1,1)\big)$. Se tiene que $N \neq M^{\perp}$, pues

$$\big\langle (1,0), (1,1) \big\rangle = 1 \neq 0,$$

además, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) = y(1,1) + (x - y)(1,0),$$

y $M \cap N = \{0\}$, es decir, $H = M \oplus N$. $\square$

> **EJERCICIO 1.3.** Sea M un conjunto convexo cerrado no vacío en un espacio de Hilbert H. Demostrar que en M existe un único elemento de norma mínima.

Demostración. Dado que $M \subseteq H$, es un cerrado, se tiene que es completo, por lo tanto, utilizando el Teorema de Proyección sobre un cerrado convexo no vacío, se tiene que para $x = 0 \in H$, existe un único $y \in M$ tal que

$$\|x - y\| = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x - \tilde{y}\|,$$

es decir,

$$\|y\| = \inf_{\tilde{y} \in M} \|\tilde{y}\|,$$

por lo tanto, existe un único elemento en M de norma mínima. $\square$

> **EJERCICIO 1.4.** Sea $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos convexos, cerrados, acotados, no vacíos, encajados en un espacio de Hilbert H. Demostrar que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posee intersección no vacía. (Sugerencia: Construir una sucesión adecuada, suponer que no es de Cauchy y utilizando la identidad del paralelogramo, obtener una contradicción).

Demostración. Se tiene que, para cada M_n, existe $x_n \in M_n$ tal que minimiza la norma en M_n. Con esto, se tiene la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es tal que

$$\delta_n = \inf_{\widetilde{x}\in M_n} \|\widetilde{x}\| = \|x_n\|.$$

Dado que los conjuntos son encajados y acotados, $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada en $\mathbb{R}$, por lo tanto, converge, digamos a δ.

Supongamos que la sucesión $(x_N)_{n\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy, por lo tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, existen $n, m > N$ que cumplen

$$\|x_n - x_m\| > \epsilon.$$

Con esto, utilizando la identidad del paralelogramo, se tiene que

$$\frac{\epsilon^2}{4} < \frac{1}{4}\|x_n - x_m\|^2 = \frac{\|x_m\|^2 + \|x_n\|^2}{2} - \frac{1}{4}\|x_n + x_m\|^2,$$

es decir

$$\left\|\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_m\right\|^2 < \frac{\|x_m\|^2 + \|x_n\|^2}{2} - \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m > n$, entonces $M_m \subseteq M_n$, por lo tanto $x_n, x_m \in M_n$, y, dado que M_n es convexo, $\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_m \in M_n$, por lo tanto,

$$\delta_n^2 \leq \frac{\delta_m^2 + \delta_n^2}{2} - \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Tomándo el límite cuando $m, n \to \infty$, se tiene que

$$\delta^2 \leq \delta^2 - \frac{\epsilon^2}{4}.$$

lo cual es imposible, por lo tanto, la sucesión es de Cauchy, y dado que el espacio es completo, converge a un elemento $x \in H$.

Para $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $(x_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de M_k convergente a x; al ser M_k, se tiene que $x \in M_k$. Por lo tanto,

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.5. Sean M un subconjunto de un espacio de Hilbert H y $u, v \in H$. Suponga que $\langle u, x\rangle = \langle v, x\rangle$ para todo $x \in M$ implica $u = v$. Demostrar que M es total en H.

Demostración. Sea $x \in M^{\perp}$, se tiene que $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $y \in M$, por otro lado, $\langle 0, y\rangle = 0$ para todo $y \in M$, por lo tanto,

$$\langle x, y\rangle = \langle 0, y\rangle,$$

para todo $y \in M$, por lo tanto, $x = 0$, es decir $M^{\perp} \subseteq \{0\}$. Como $M^{\perp}$ es un sub-espacio vectorial, se tiene que $M^{\perp} = \{0\}$. De aquí, se tiene que M es un conjunto total en H. $\square$

EJERCICIO 1.6. Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y

$$h\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{K},$$

una aplicación sesquilineal para la cual existe $M > 0$ tal que

$$\big|h(x, y)\big| \leq M\|x\|_1\|y\|_2,$$

para todo $x \in H_1$ y $y \in H_2$. Demostrar que existe

$$S\colon H_1 \to H_2$$

un operador lineal y acotado tal que

$$h(x, y) = \langle S(x), y\rangle_2,$$

para todo $x \in H_1$ y $y \in H_2$, además, $|h(x, y)| \leq \|S\|\|x\|_1\|y\|_2$. (Sugerencia: Construir un operador lineal adecuado y utilizar el Teorema de Representación de Riesz).

Demostración. La demostración de este resultado es la primera parte de la segunda forma del Teorema de Representación de Riesz (Teorema 1.26). $\square$

NOTACIÓN

Símbolo	**Descripción**
A^c	Complemento del conjunto A.
$A \setminus B$	Diferencia entre el conjunto A y el conjunto B.
$E^\times$	Conjunto de operadores lineales de E en sí mismo. Dual algebraico.
E^*	Espacio de todos los operadores lineales y continuos de E en sí mismo. Dual topológico.
$\mathcal{L}(E,F)$	Espacio de todos los operadores lineales y continuos de E en F.
$E_\mathbb{R}$	Proyección del espacio vectorial complejo, E, visto como un espacio vectorial real.
$\mathrm{int}(X)$	Interior del espacio topológico X.
$\overline{X}$	Clausura del espacio topológico X.
$B(x,r)$	Bola de centro x y radio r.
$B(r)$	Bola de centro 0 y radio r.
$\mathrm{span}(M)$	Conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de M.
$\mathrm{dom}(f)$	Dominio de la función f.
$\mathrm{img}(f)$	Imagen de la función f.
$\mathrm{graf}(T)$	Grafo de la aplicación lineal T.
$[\![m,n]\!]$	Intervalo de números enteros entre m y n.
$[a,b]$	Segmento cerrado entre a y b.
$]a,b[$	Segmento abierto entre a y b.
$\langle x,y\rangle$	Producto interno entre x y y.
$\|x\|$	Norma del vector x.
$x \perp y$	x es ortogonal a y.
$M^\perp$	Complemento ortogonal de M.
T^*	Operador adjunto de A en un espacio de Hilbert.
$T^\times$	Operador adjunto de A en un espacio de Banach.
T^n	Composición del operador T consigo mismo n veces.
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Sucesión de elementos en el espacio métrico X.
$x_n \to x$	La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x cuando n tiende a $+\infty$.

Símbolo	**Descripción**
$\lim x_n = x$	El límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cuando n tiende a $+\infty$, es x.
Tx	Imagen de x bajo el operador lineal T.
$\mathcal{C}(\Omega)$	Espacio de funciones continuas definidas sobre el conjunto Ω.
$\mathcal{C}^1(\Omega)$	Espacio de funciones con una derivada continua definidas sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.
$\mathscr{L}^p[a,b]$	Completación del espacio $\mathcal{C}[a,b]$ con la norma $\|u\| = \left(\int_a^b u(x)^p\,dx\right)^{1/p}$, para $1 \leq p < +\infty$.
$\ell^p(\mathbb{K})$	Espacio de sucesiones de elementos en $\mathbb{K}$ con la norma $\|u\| = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i^p\right)^{1/p}$, para $1 \leq p < +\infty$.

Bibliografía

[1] H. Brézis. *Análisis funcional*. Alianza Editorial S.A., 1984.

[2] H. Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.

[3] G. Chirstol, A. Cot, y C. Marle. *Calcul différentiel*. Mathématiques pour le 2^{E} cycle. ellipses, 1997.

[4] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, 1978.

[5] L. Todjuhounde. *Calcul différentiel: cours et exercise corrgés*. Cépaduès–éditions, 2004.

Índice alfabético

Aniquilador de un conjunto, 33

Complemento ortogonal, 14
Conjunto
    convexo, 11
    ortogonal, 8
    total, 17

Desigualdad
    de Bessel, 34
    de Cauchy-Schwarz, 4

Espacio
    de Hilbert, 7
    reflexivo, 20

Identidad de la polarización, 33
Igualdad
    de Parseval, 34
    del paralelogramo, 6

Ortogonalidad, 7

Producto escalar, 3

Suma directa, 14

Teorema
    de Pitágoras, 7
    de representación de Riesz, 19
    Proyección sobre un convexo, cerrado y no vacío, 11

Análisis Matemático II

El presente fascículo recolecta las principales definiciones, proposiciones y teoremas, sobre Espacios de Hilbert, vistos en el curso de "Análisis Matemático II", dictado en la carrera de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional. Además, presenta un compendio de ejercicios propuestos y resueltos referente a este tema. Este trabajo se lo realizó en base a los apuntes de clase de la asignatura por el profesor Mat. Andrés Merino en la carrera de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional, y recopilado por el estudiante Andrés Miniguano.

Cualquier corrección, propuesta de cambio o mejora del presente trabajo se la puede realizar al correo: `mat.andresmerino@gmail.com`.

Proyecto CLAVEMAT

ISBN 978-0000-000-00-2

9 780000 000002 >