Fascículos de Matemática
del Proyecto CLAVEMAT

2 (1)

Análisis Matemático I

Resumen y Ejercicios Resueltos

1. Espacios métricos

Proyecto CLAVEMAT

Fascículos de Matemática
del Proyecto CLAVEMAT

Proyecto CLAVEMAT

Análisis Matemático I

Resumen y Ejercicios Resueltos

1. Espacios métricos

Fascículo de Matemática No. 2 (1)

ANÁLISIS MATEMÁTICO I: RESUMEN Y EJERCICIOS RESUELTOS
1. ESPACIOS MÉTRICOS

PROYECTO CLAVEMAT

Escrito por: Cristian Guachamín, Roque Miño, Luis Pozo
Responsable de la Edición: Andrés Merino
Revisión Académica: el texto aún no cuenta con revisión académica de pares

Registro de derecho autoral No.
ISBN: 978-0000-000-00-0

Publicado por el proyecto CLAVEMAT de la Escuela Politécnica Nacional, Ladrón de Guevara E11-253, Quito, Ecuador.

Primera edición: 2016
Primera impresión: 2016

Índice general

FASCÍCULO 1

ESPACIOS MÉTRICOS

1.1. Resumen

1.1.1. Topología

DEFINICIÓN 1.1 (Espacio topológico)**.** Sean E un conjunto y $\tau \subseteq \mathcal{P}(E)$, se dice que τ es una *topología* de E si se verifica que

i) $\varnothing, E \in \tau$;

ii) si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$; y

iii) si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos de τ, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Al par (E, τ) se lo llama *espacio topológico* y a los elementos de τ se los llama *abiertos* de E.

PROPOSICIÓN 1.1. Sean (E, τ) un espacio topológico y $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.

DEFINICIÓN 1.2 (Vecindad)**.** Sean (E, τ) un espacio topológico y $x \in E$. Un conjunto $V_x \subseteq E$ es una *vecindad* de x si existe $U \in \tau$ tal que

$$x \in U \subseteq V_x.$$

DEFINICIÓN 1.3 (Conjunto cerrado)**.** Sea (E, τ) un espacio topológico, entonces $F \subseteq E$ se dice *cerrado* si $F^c \in \tau$.

PROPOSICIÓN 1.2. Sea (E, τ) un espacio topológico. Entonces *i)* $\varnothing$ y E son cerrados;

ii) si A y B son cerrados, entonces $A \cup B$ son cerrados; y

iii) si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia arbitraria de conjuntos cerrados, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ es también un conjunto cerrado.

PROPOSICIÓN 1.3. Sean (E, τ) un espacio topológico y $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos cerrados. Entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es un conjunto cerrado.

1.1.2. Métrica

DEFINICIÓN 1.4 (Espacio métrico)**.** Sean E un conjunto y una función

$$\begin{aligned} d\colon E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

tal que para todo $x, y, z \in E$ verifique que

i) $d(x, y) \geq 0$;

ii) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$;

iii) $d(x, y) = d(y, x)$; y

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Entonces, se dice que d es una *métrica* sobre E y al par (E, d) se lo llama *espacio métrico*.

DEFINICIÓN 1.5 (Bola abierta)**.** Sean (E, d) un espacio métrico, $x \in E$ y $r > 0$, se define el conjunto

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\},$$

y se lo llama *bola abierta* de centro x y radio r.

PROPOSICIÓN 1.4. Sean (E, d) un espacio métrico, $x \in E$ y $r > 0$. Entonces $B(x, r)$ es un conjunto abierto.

DEFINICIÓN 1.6. Sean (E,d) un espacio métrico, $x \in E$ y $r > 0$. Se definen

i) $B[x,r] = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}$ como la *bola cerrada* de centro x y radio r; y

ii) $S(x,r) = \{y \in E : d(x,y) = r\}$ como la *esfera* de centro x y radio r.

PROPOSICIÓN 1.5. Sean (E,d) un espacio métrico y $r > 0$. Entonces, para todo $x \in E$, $B[x,r]$ y $S(x,r)$ son conjuntos cerrados.

DEFINICIÓN 1.7. Sea (E,d) un espacio métrico. Al conjunto

$$\tau = \{A \subseteq E : (\forall x \in A)(\exists r > 0)(B(x,r) \subseteq A)\},$$

se lo conoce como la *topología inducida* por d.

DEFINICIÓN 1.8. Sean (E,d) una espacio métrico y $A \subseteq E$. Se dice que A es *acotado* si se verifica alguna de las siguientes condiciones:

i) Existen $x \in E$ y $R \geq 0$ tales que $A \subseteq B(x,R)$.

ii) El conjunto $\{d(y,z) : y,z \in A\}$ es acotado en $\mathbb{R}$, es decir, existe $M > 0$ tal que $(d(y,z) \leq M)$, para todo $y,z \in A$.

DEFINICIÓN 1.9. Sean (E,d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Se define el *diámetro* de A como

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}.$$

DEFINICIÓN 1.10. Sean (E,d) un espacio métrico, $x \in E$ y $A \subseteq E$. Se define la distancia desde x hacia A como

$$d(x,A) = \text{ínf}\left\{d(x,y) : y \in A\right\}.$$

1.1.3. Interior, clausura, derivado y frontera

DEFINICIÓN 1.11 (Interior y clausura)**.** Sean (E,τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. Se definen

> *i)* el *interior* de A, notado por $\text{int}(A)$, como el abierto más grande que está contenido en A; y
>
> *ii)* la *clausura* de A, notado por $\overline{A}$, como el cerrado más pequeño que contiene a A.

OBSERVACIÓN. Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$, se tiene que

i) si U es un conjunto abierto tal que $U \subseteq A$, entonces $U \subseteq \text{int}(A) \subseteq A$; y

ii) si F es un conjunto cerrado tal que $A \subseteq F$, entonces $A \subseteq \overline{A} \subseteq F$.

PROPOSICIÓN 1.6. Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. Definamos los conjuntos

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq E : U \text{ es abierto y } U \subseteq A\} \quad \text{y} \quad \mathcal{F} = \{F \subseteq E : F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}.$$

Entonces

$$\text{int}(A) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \qquad \text{y} \qquad \overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F.$$

> **DEFINICIÓN 1.12** (Punto interior)**.** Sean (E, τ) un espacio topológico, $A \subseteq E$ y $x \in A$. Se dice que x es *punto interior* de A si A es una vecindad de x, es decir, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq A$.

PROPOSICIÓN 1.7. Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. Se tiene que x es un punto interior de A si y solo si $x \in \text{int}(A)$.

PROPOSICIÓN 1.8. Sean (E, d) un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $x \in A$. Se dice que x es *punto interior* de A si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$

PROPOSICIÓN 1.9. Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. Se tiene que A es un conjunto abierto si y sólo si todo punto x de A es un punto interior de A.

PROPOSICIÓN 1.10. Sea (E, τ) un espacio topológico. Se tiene que $A \subseteq E$ es un conjunto abierto si y sólo si $A = \text{int}(A)$.

> **DEFINICIÓN 1.13** (Punto de clausura)**.** Sean (E, τ) un espacio topológico, $A \subseteq E$ y $x \in E$. Se dice que x es *punto de clausura* de A si para toda

vecindad V_x del punto x se tiene que

$$V_x \cap A \neq \varnothing.$$

Proposición 1.11. Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. Se tiene que x es un *punto de clausura* de A si y solo si $x \in \overline{A}$.

Proposición 1.12. Sean (E, d) un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $x \in E$. Se tiene que x es un punto de clausura de A si para todo $r > 0$ se verifica que

$$B(x, r) \cap A \neq \varnothing.$$

Proposición 1.13. Sea (E, τ) un espacio topológico. Se dice que $A \subseteq E$ es un conjunto cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.

Definición 1.14 (Punto de acumulación)**.** Sean (E, τ) un espacio topológico, $A \subseteq E$ y $x \in E$. Se dice que x es *punto de acumulación* de A si para toda vecindad V_x del punto x se tiene que

$$(V_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

Al conjunto de puntos de acumulación de A, se lo nota A', y se lo llama el *derivado* de A.

Proposición 1.14. Sean (E, d) un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $x \in E$. Se tiene que x es un *punto de acumulación* de A si para todo $r > 0$ se verifica que

$$(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

Definición 1.15 (Punto aislado)**.** Sean (E, τ) un espacio topológico, $A \subseteq E$ y $x \in A$. Se dice que x es un *punto aislado* de A si $x \notin A'$.

Definición 1.16. Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. Se define la *frontera* de A como el conjunto

$$\partial A = \{x \in E : \text{para toda } V_x \text{ vecindad de } x\ V_x \cap A \neq \varnothing \text{ y } V_x \cap A^c \neq \varnothing\}.$$

Proposición 1.15. Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$. Se tiene que

$$\partial A = \{x \in E : (\forall r > 0)(B(x, r) \cap A \neq \varnothing \wedge B(x, r) \cap A^c \neq \varnothing)\}.$$

Definición 1.17. Sea (E,d) un espacio métrico. Un conjunto $M \subseteq E$ se dice *denso* en E si $\overline{M} = E$.

1.1.4. Sucesiones

Definición 1.18 (Sucesión)**.** Sea E un conjunto no vacío, una *sucesión* es una función $x\colon \mathbb{N} \to E$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se nota $x(n) = x_n$ y a la función x se la nota por:

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Definición 1.19. Sean (E,d) un espacio métrico, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E y $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. A la función $x \circ \phi\colon \mathbb{N} \to E$ se la llama *subsucesión* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y se la representa por $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 1.20 (Límite)**.** Sean (E,d) un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E y $x \in E$. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n \geq N \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon).$$

Se representa por $x_n \to x$, cuando $n \to +\infty$.

Proposición 1.16. Sean (E,d) un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E y $x \in E$. Se tiene que $x_n \to x$ cuando $n \to +\infty$ si y solo si $d(x_n, x) \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Proposición 1.17. Sean (E,d) un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $x \in E$. Se tiene que x es un punto de clausura si y sólo si existe alguna sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $x_n \to x$ cuando $n \to +\infty$.

Proposición 1.18. Sean (E,d) un espacio métrico y $F \subseteq E$. Se tiene que F es cerrado si y sólo si toda sucesión convergente de elementos de F converge en F.

Definición 1.21 (Sucesión acotada)**.** Sean (E,d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está *acotada* si el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.

DEFINICIÓN 1.22 (Sucesión de Cauchy)**.** Sean (E, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de *Cauchy* si

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n, m > N \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

DEFINICIÓN 1.23 (Espacio métrico completo)**.** Un espacio métrico (E, d) se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy converge.

PROPOSICIÓN 1.19. El espacio $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico completo con

$$\begin{aligned} d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = |x - y|. \end{aligned}$$

1.1.5. Completación de espacios métricos

DEFINICIÓN 1.24 (Isometría)**.** Sean (E, d_1) y (F, d_2) dos espacios métricos y $f\colon E \to F$ una función. Se dice que f es una *isometría* si

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y),$$

para todo $x, y \in E$.

TEOREMA 1.20. Todo espacio métrico puede ser completado. Es decir, sea (E, d) un espacio métrico, existe un espacio métrico completo (F, δ) tal que

i) existe una isometría $f\colon E \to F$; y

ii) $\overline{f(E)} = F$.

Además, F es único, salvo isomorfismos.

1.2. Ejercicios

EJERCICIO 1.1. Sean (E, τ) un espacio topológico y $F \subseteq E$, se define

$$\tau_F = \{A \cap F : A \in \tau\},$$

demostrar que (F, τ_F) es un espacio topológico.

Demostración. Demostremos que τ_F define una topología sobre F probando las cuatro propiedades de la Definición 1.1.

i) Notemos que $\varnothing \in \tau_F$. En efecto, sabemos que $\varnothing = \varnothing \cap F$ y que además $\varnothing \in \tau$. De igual manera, sabemos que $F = E \cap F$ y que $E \in \tau$, por lo tanto $F \in \tau_F$.

ii) Supongamos que $A,\ B \in \tau_F$, entonces tenemos que $A = U \cap F$ y $B = V \cap F$, con $U, V \in \tau$. Ahora, $A \cap B = (U \cap V) \cap F$, pero $U \cap V \in \tau$, por lo tanto, se tiene que $A \cap B \in \tau_F$.

iii) Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de τ_F, entonces se tiene que $A_i = U_i \cap F$, con $U_i \in \tau$ para todo $i \in I$. Por lo tanto,

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(U_i \cap F) = \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cap F,$$

pero $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$, por lo tanto

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau_F.$$

De lo anterior, se sigue que (F, τ_F) es un espacio topológico. □

> **EJERCICIO 1.2.** Sea (E, d) un espacio métrico. Demostrar que el conjunto
>
> $$\tau = \{A \subseteq E : (\forall x \in A)(\exists r > 0)(B(x,r) \subseteq A)\},$$
>
> define una topología sobre E.

Demostración. Demostremos las cuatro propiedades de la Definición 1.1.

i) Notemos que $E \in \tau$, pues siempre se tiene que $B(x,r) \subseteq E$, independientemente del punto x y del radio r. Además $\varnothing \in \tau$, pues de no ser así tendríamos que existe $x \in \varnothing$ tal que para todo $r > 0$ se verifique que $B(x,r) \nsubseteq \varnothing$, lo cual contradice el hecho de que el vacío no tiene elementos.

ii) Sean $A,\ B \in \tau$ y $x \in A \cap B$. Notemos que $x \in A$ y $x \in B$, entonces existen r_1 y r_2 tales que $B(x,r_1) \subseteq A$ y $B(x,r_2) \subseteq B$, de donde se tiene que $B(x,r_1) \cap B(x,r_2) \subseteq A \cap B$. Tomemos entonces $r = \text{mín}\{r_1, r_2\}$, así

$$B(x,r) = B(x,r_1) \cap B(x,r_2) \subseteq A \cap B,$$

por lo tanto $A \cap B \in \tau$.

iii) Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de τ y $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Entonces existe $j \in I$ tal que $x \in A_j$, pero ya que $A_j \in \tau$, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq A_j$. Por otro lado, $A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ y por lo tanto $B(x,r) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. Se sigue entonces que $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$.

De lo anterior, se sigue que τ es una topología sobre E. □

EJERCICIO 1.3. Sea F un conjunto infinito, se define:

$$\rho = \{A \subseteq F : A^c \text{ es finito}\} \cup \{\varnothing\}.$$

Demostrar que (F,ρ) es un espacio topológico.

Demostración. Demostraremos las propiedades de la Definición 1.1.

i) Notemos que $F \in \rho$, pues $F^c = \varnothing$ es un conjunto finito. Además $\varnothing \in \rho$ por definición.

ii) Sean $A, B \in \tau$, si uno de estos conjuntos es vacío, se concluye directamente que $A \cap B \in \rho$. Por otro lado, si ambos son no vacío, por definición de ρ, tenemos que A^c y B^c son finitos. Ahora, dado que la unión de dos conjuntos finitos es un conjunto finito, entonces $A^c \cup B^c$ es finito; es decir, $(A \cap B)^c$ es finito y por tanto $A \cap B \in \rho$

iii) Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de ρ. Sabemos que $A_i \in \tau$, para todo $i \in I$, entonces A_i^c es finito o $A_i = \varnothing$, para todo $i \in I$. Consideremos dos casos:

- Si A_i es vacío para todo $i \in I$, entonces $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \varnothing \in \rho$.
- Si existe $j \in I$ tal que $A_j \neq \varnothing$, entonces A_j^c es finito. Ahora, tenemos que
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} (A_i)^c \subseteq A_j^c,$$
por lo tanto, $\displaystyle\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c$ es finito y esto implica que $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i \in \rho$.

Así, se tiene que ρ es una topología sobre F. □

EJERCICIO 1.4. Bajo el enunciado del ejercicio anterior:

a) ¿Cómo son los conjuntos cerrados de esta topología?

b) Calcule $\overline{D}$ para cualquier $D \subseteq F$.

c) Si C y D son abiertos no vacíos en esta topología, demostrar que $C \cap D \neq \varnothing$

Solución.

a) Sea $D \subseteq F$ se tiene que D es un conjunto cerrado si y solo si se tiene que $D^c \in \rho$, es decir, si y solo si o $D^c = \varnothing$ o $(D^c)^c$ es finito. Por lo tanto, D es un cerrado si y solo si o $D = F$ o D es un conjunto finito.

b) Sea $D \subseteq F$. Si D es finito, entonces D es cerrado y por tanto $\overline{D} = D$. Si D es infinito, entonces $D \subseteq \overline{D}$ y por lo tanto $\overline{D}$ es infinito; es decir $\overline{D} = F$.

c) Procedamos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que $C \cap D = \varnothing$. Puesto que C y $D \in \rho$, se tiene que C^c y D^c son finitos, por otro lado, se tiene que

$$C^c \cup D^c = (C \cap D)^c = \varnothing^c = F,$$

por lo tanto, F es la unión de dos conjuntos finitos, lo cual es contradictorio, pues F es infinito, por lo tanto, $C \cap D \neq \varnothing$. □

EJERCICIO 1.5. Sean (E, τ) un espacio topológico y $A, B \subseteq E$. Si $A \subseteq B$, demostrar que $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$.

Demostración. Notemos que $\text{int}(A) \subseteq A$ y por lo tanto $\text{int}(A) \subseteq B$. Ahora, puesto que $\text{int}(A)$ es un conjunto abierto y que $\text{int}(B)$ es el abierto más grande contenido en B, se sigue que $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$. □

EJERCICIO 1.6. Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$, Demostrar que $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$.

Demostración. Sabemos que $\text{int}(A)$ es un conjunto abierto, además $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(A)$, por lo tanto $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(\text{int}(A)) \subseteq \text{int}(A)$. □

EJERCICIO 1.7. Sean (E, τ) un espacio topológico y A, $B \subseteq E$. Si $A \subseteq B$, demostrar que $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Demostración. Ya que $B \subseteq \overline{B}$, entonces $A \subseteq \overline{B}$ y puesto que $\overline{B}$ es un cerrado que contiene a A, se sigue que $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. □

EJERCICIO 1.8. Sean (E, τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. Demostrar que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Demostración. Sabemos que $\overline{A}$ es un cerrado, además $\overline{A} \subseteq \overline{A}$, por lo tanto $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$. □

EJERCICIO 1.9. Sean (E, τ) un espacio topológico y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de E.

a) Demostrar que $\bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}$.

b) Demostrar que, si I es finito, entonces $\bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}$.

c) Demostrar que $\overline{\bigcap\limits_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} \overline{A_i}$.

Demostración.

a) Notemos que $A_j \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i \subseteq \overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}$, para todo $j \in I$. Como $\overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}$ es cerrado, se tiene que $\overline{A_j} \subseteq \overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}$, para todo $j \in I$. Por lo tanto

$$\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}.$$

b) Gracias al literal anterior, ya tenemos una inclusión, por lo cual, resta probar que $\overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i}$. Se tiene que $A_i \subseteq \overline{A_i}$, para todo $i \in I$, de donde,

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Dado que I es finito, concluimos que $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ es un cerrado. Entonces, por definición de clausura, tenemos que

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

c) Tenemos que $A_i \subseteq \overline{A_i}$, para todo $i \in I$, por lo tanto

$$\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Ahora, como la intersección de una familia arbitraria de conjuntos cerrados, es un cerrado, entonces $\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$ es un conjunto cerrado. Luego, por definición de clausura, colegimos que

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$ □

EJERCICIO 1.10. Bajo el enunciado del ejercicio anterior:

i) Dar un ejemplo en que la igualdad en *a)* no se cumple.

ii) Dar un ejemplo en el que la igualdad en *c)* no se cumple, incluso si I es finito.

Demostración.

i) Tomemos, para $n \in I = \mathbb{N}^*$, los conjuntos $A_n = \left(\frac{1}{n}, 2\right)$. Así,

$$\overline{A_n} = \left[\frac{1}{n}, 2\right] \qquad \text{y} \qquad \bigcup_{n\in I} \overline{A_n} = (0, 2],$$

por lo tanto

$$\bigcup_{n\in I} A_n = (0, 2) \qquad \text{y} \qquad \overline{\bigcup_{n\in I} A_n} = [0, 2]$$

Así, se tiene que la igualdad no siempre se verifica.

ii) Tomemos, ahora, los conjuntos

$$A_1 = (0, 1) \quad \text{y} \quad A_2 = (1, 2).$$

Tenemos que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, por lo tanto

$$\overline{A_1 \cap A_2} = \varnothing$$

Por otro lado, se tiene que

$$\overline{A_1} = [0,1] \qquad \text{y} \qquad \overline{A_2} = [1,2],$$

entonces $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \{1\}$, de donde se sigue que la igualdad no se verifica.

$\square$

EJERCICIO 1.11. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de un espacio topológico E.

1. Demostrar que $\displaystyle\bigcup_{i\in I} \operatorname{int}(A_i) \subseteq \operatorname{int}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.
2. Demostrar que, si I es finito, entonces $\displaystyle\bigcap_{i\in I} \operatorname{int}(A_i) = \operatorname{int}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

Demostración.

1. Notemos que $\operatorname{int}(A_i) \subseteq A_i$, para todo $i \in I$. Entonces $\displaystyle\bigcup_{i\in I} \operatorname{int}(A_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, y puesto que $\displaystyle\bigcup_{i\in I} \operatorname{int}(A_i)$ es un conjunto abierto, se sigue que

$$\bigcup_{i\in I} \operatorname{int}(A_i) \subseteq \operatorname{int}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right).$$

2. Supongamos que I es finito. Se tiene que $\operatorname{int}(A_i) \subseteq A_i$ para todo $i \in I$, por lo tanto $\displaystyle\bigcap_{i\in I} \operatorname{int}(A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$. Ahora, puesto que I es finito, se tiene que $\displaystyle\bigcap_{i\in I} \operatorname{int}(A_i)$ es un conjunto abierto, lo que implica que

$$\bigcap_{i\in I} \operatorname{int}(A_i) \subseteq \operatorname{int}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right). \tag{1.1}$$

Por otro lado, notemos que $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_j$ para todo $j \in I$, por lo tanto

$$\operatorname{int}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \operatorname{int}(A_j).$$

para todo $j \in I$. Esto implica que

$$\operatorname{int}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} \operatorname{int}(A_i). \tag{1.2}$$

De (1.1) y (1.2) se sigue que

$$\bigcap_{i\in I} \operatorname{int}(A_i) = \operatorname{int}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right). \qquad \square$$

EJERCICIO 1.12. Sean (E,τ) un epacio topológico, y $F \subseteq E$.Demostrar que

$$\operatorname{int}(F) \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{int}(F))$$

Demostración. Sabemos, por definición de clausura, que $\operatorname{int}(F) \subseteq \overline{\operatorname{int}(F)}$; como $\operatorname{int}(F)$ es una bierto contenido en $\overline{\operatorname{int}(F)}$, concluimos que

$$\operatorname{int}(F) \subseteq \operatorname{int}\overline{\operatorname{int}(F)} \qquad \square$$

EJERCICIO 1.13. Sean (E,τ) un espacio topológico, y F un cerrado de E. Demostrar que

$$\operatorname{int}(F) = \operatorname{int}(\overline{\operatorname{int}(F)}).$$

Demostración. La primera implicación se verifica por el enunciado anterior. Ahora, por la definición de se tiene que $\operatorname{int}(F) \subseteq F$, entonces,

$$\overline{\operatorname{int}(F)} \subseteq \overline{F},$$

pero como F es cerrado, es decir, $\overline{F} = F$, de donde $\overline{\operatorname{int}(A)} \subseteq F$, por lo tanto,

$$\operatorname{int}(\overline{\operatorname{int}(F)}) \subseteq \operatorname{int}(F).$$

De esta manera se verifica la igualdad. $\square$

> **EJERCICIO 1.14.** Sean (E,τ) un espacio topológico y $A \subseteq E$. Demostrar que $\overline{A}^c = \operatorname{int}(A^c)$.

Demostración. Sabemos que $\operatorname{int}(A^c) \subseteq A^c$, por lo tanto $A \subseteq \operatorname{int}(A^c)^c$. Como $\operatorname{int}(A^c)^c$ es cerrado, entonces $A \subseteq \overline{A} \subseteq \operatorname{int}(A^c)^c$, de donde

$$\operatorname{int}(A^c) \subseteq \overline{A}^c.$$

Por otro lado, tenemos que $A \subseteq \overline{A}$, así, $\overline{A}^c \subseteq A^c$. Como $\overline{A}^c$ es abierto, entonces $\overline{A}^c \subseteq \operatorname{int}(A^c) \subseteq A^c$, de donde

$$\overline{A}^c \subseteq \operatorname{int}(A^c).$$

Con esto, tenemos que $\overline{A}^c = \operatorname{int}(A^c)$. □

> **EJERCICIO 1.15.** Sean (E,τ) un espacio topológico y A, $B \subseteq E$. ¿En qué relación están ∂A y ∂B?

Solución. Consideremos los conjuntos

$$A = (1,4] \quad \text{y} \quad B = (2,3).$$

Notemos que $B \subseteq A$ y que además

$$\partial A = \{1,4\} \quad \text{y} \quad \partial B = \{2,3\}.$$

En efecto, sea $r > 0$ entonces $B(1,r) = (1-r, 1+r)$ y $B(4,r) = (4-r, 4+r)$. Analicemos dos casos:

i) Si $r \leq 3$, entonces

$$B(1,r) \cap A = (1, 1+r) \neq \varnothing \qquad \text{y} \qquad B(1,r) \cap A^c = (1-r, 1] \neq \varnothing,$$

además

$$B(4,r) \cap A = (4-r, 4] \neq \varnothing \qquad \text{y} \qquad B(4,r) \cap A^c = (4, 4+r) \neq \varnothing.$$

ii) Si $r > 3$, entonces

$$B(1,r) \cap A = A \neq \varnothing \qquad \text{y} \qquad B(1,r) \cap A^c = (1-r, 1] \cup (4, 1+r) \neq \varnothing,$$

además

$$B(4,r)\cap A = A \neq \varnothing \qquad \text{y} \qquad B(4,r)\cap A^c = (4-r,1]\cup(4,4+r)\neq\varnothing.$$

De lo anterior podemos concluir que 1 y 4 son puntos de frontera de A.

Probemos ahora que 1 y 4 son los únicos puntos de frontera de A. Supongamos que existe algún $x \in (-\infty,1)\cup A\setminus\{0\}\cup(4,+\infty)$ tal que $x\in\partial A$. Notemos que si $x\in A\setminus\{0\}$, puesto que A es abierto, existe $r>0$ tal que $B(x,r)\subseteq A$ y por lo tanto $B(x,r)\cap A^c=\varnothing$, es decir $x\notin\partial A$. Por otro lado, si $x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$, puesto que este conjunto es abierto, existe $r>0$ tal que $B(x,r)\subseteq(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$ y por tanto $B(x,r)\cap A=\varnothing$, lo que contradice nuevamente nuestra suposición. Así, tenemos que ningún otro punto puede ser punto de frontera de A.

Siguiendo este mismo razonamiento se puede probar que $\partial B=\{2,3\}$. Por último, se puede ver que no existe ninguna relación entre ∂A y ∂B. □

EJERCICIO 1.16. Sea (E,d) un espacio métrico. Para $x,y\in E$ se define

$$\delta(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

Demostrar que esta funcion también es una métrica sobre E.

Demostración. Probaremos las cuatro propiedades de la Definición 1.4. Sean x, $y,z\in E$.

i) Puesto que d es una métrica se verifica que $d(x,y)\geq 0$, por lo tanto $1+d(x,y)>0$. Luego, se tiene que

$$0\leq\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=\delta(x,y).$$

ii) Supongamos que $\delta(x,y)=0$. Se tiene que $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0$, lo cual implica que $d(x,y)=0$, por lo tanto, puesto que d es una métrica, se sigue que $x=y$. Recíprocamente, supongamos que $x=y$, entonces $d(x,y)=0$. Ahora, notemos que $1+d(x,y)>0$, entonces $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0$. Por lo tanto $\delta(x,y)=0$.

iii) Puesto que d es una métrica, se tiene que $d(x,y) = d(y,x)$ y por lo tanto

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \delta(y,x).$$

iv) Para demostrar esta propiedad consideremos la función

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \quad &\longmapsto f(t) = \tfrac{t}{1+t}. \end{aligned}$$

Si derivamos f, tenemos que $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$ para todo $t \in [0,\infty)$, lo que significa que f es estrictamente creciente. Por otro lado, como d es métrica, se tiene que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Si aplicamos f a esta última desigualdad, esta se mantiene. Así,

$$f(d(x,y)) \leq f(d(x,z)+d(z,y)) = \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}.$$

Ahora, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} &= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\ &\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\delta(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \dfrac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \dfrac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = \delta(x,z) + \delta(z,y)$.

De lo anterior se tiene que δ es una métrica sobre E. □

EJERCICIO 1.17. Sea $\{(E_i,d_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios métricos, donde $I = \{1,2,...,n\}$ y sea $F = E_1 \times E_2 \times, \cdots, \times E_n$. Para $x = (x_1,x_2,\cdots,x_n)$ y $y = (y_1,y_2,\cdots,y_n)$, elementos de F, se define

$$d_+(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i).$$

Demostrar que esta función es una métrica sobre F.

Demostración. Sean $x,y,z \in F$.

i) Notemos que $d_i(x_i, y_i) \geq 0$, para todo $i \in I$. Por lo tanto

$$d_+(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) \geq 0.$$

ii) Supongamos que $d_+(x,y) = 0$, es decir, $\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) = 0$. Ahora, puesto que $d_i(x_i, y_i) \geq 0$, para todo $i \in i$, tenemos que $d_i(x_i, y_i) = 0$, para todo $i \in I$ y por lo tanto $x_i = y_i$, para todo $i \in I$. Así $x = y$.

Recíprocamente, si $x = y$, tenemos que $x_i = y_i$ para todo $i \in I$, lo que implica que $d_i(x_i, y_i) = 0$, para todo $i \in I$. Por lo tanto $d_+(x,y) = 0$.

iii) Ahora, notemos que $d_i(x_i, y_i) = d_i(y_i, x_i)$, para todo $i \in I$ entonces

$$d_+(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} d_i(y_i, x_i) = d_+(y,x).$$

iv) Finalmente $d_i(x_i, y_i) \leq d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i)$, para todo $i \in I$, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) &\leq \sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, z_i) + \sum_{i=1}^{n} d_i(z_i, y_i).\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$d_+(x,y) \leq d_+(x,z) + d_+(y,z).$$

Por lo tanto, d_+ es una métrica sobre F. □

EJERCICIO 1.18. Sea $\{(E_i, d_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios métricos, donde $I = 1, 2, ..., n$ y sea $F = E_1 \times E_2 \times, \cdots, \times E_n$. Para $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, elementos de F, se definen

$$d_\infty(x,y) = \max_{i \in I} d_i(x_i, y_i).$$

Demostrar que esta función es una métrica sobre F.

Demostración. Sean $x, y, z \in F$.

1. Como $d_i(x_i, y_i) \geq 0$, para todo $i \in I$, se tiene que

$$\max_{i \in I} d_i(x_i, y_i) \geq 0.$$

Por lo tanto $d_\infty(x,y) \geq 0$.

2. Supongamos que $d_\infty(x,y) = \max\limits_{i\in I} d_i(x_i,y_i) = 0$, dado que $d_i(x_i,y_i) \geq 0$, para todo $i \in I$, entonces

$$d_i(x_i,y_i) = 0.$$

Por lo tanto $x_i = y_i$,para todo $i \in I$, es decir $x = y$. Recíprocamente supongamos que $x = y$, entonces $x_i = y_i$, para todo $i \in I$, por lo tanto $d_i(x_i,y_i) = 0$, para todo $i \in I$. Entonces, $\max\limits_{i\in I} d_i(x_i,y_i) = 0$, es decir $d_\infty(x,y) = 0$.

3. Ahora, notemos que $d_i(x_i,y_i) = d_i(y_i,x_i)$, para todo $i \in I$, entonces

$$d_\infty(x,y) = \max_{i\in I} d_i(x_i,y_i) = \max_{i\in I} d_i(y_i,x_i) = d_\infty(y,x).$$

4. Finalmente, puesto que

$$d_i(x_i,y_i) \leq d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i),$$

para todo $i \in I$. Por otro lado

$$d_i(x_i,z_i) \leq \max_{i\in I} d_i(x_i,z_i) \qquad \text{y} \qquad d_i(z_i,y_i) \leq \max_{i\in I} d_i(z_i,y_i).$$

para todo $i \in I$, entonces

$$d_i(x_i,y_i) \leq \max_{i\in I} d_i(x_i,z_i) + \max_{i\in I} d_i(z_i,y_i)$$

para todo $i \in I$, por lo tanto

$$\max_{i\in I} d_i(x_i,y_i) \leq \max_{i\in I} d_i(x_i,z_i) + \max_{i\in I} d_i(z_i,y_i),$$

es decir

$$d_\infty(x,y) \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y).$$

Por lo tanto, d_∞ es una métrica sobre F. □

EJERCICIO 1.19. Sea (E,d) un espacio métrico. Demostrar que para todo $x,y,z \in E$ se verifica la desigualdad:

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

Demostración. Sean $x, y, z \in E$. Por la desigualdad triangular tenemos que

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \qquad \text{y} \qquad d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z).$$

Entonces

$$d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y) \qquad \text{y} \qquad -\left(d(x,z) - d(y,z)\right) \leq d(x,y).$$

De las desigualdades anteriores, y por propiedades del valor absoluto, tenemos que

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

□

> **EJERCICIO 1.20.** Sean (E,d) un espacio métrico, $x \in E$ y $r > 0$. Demostrar que $B(x,r)$ es un conjunto abierto.

Demostración. Sea $y \in B(x,r)$, debemos probar que existe $\rho > 0$ tal que $B(y,\rho) \subseteq B(x,r)$. Notemos que si $y = x$, entonces basta tomar $\rho = r$, pues tendríamos

$$B(y,\rho) = B(x,r) \subseteq B(x,r).$$

Ahora, si $y \neq x$, entonces $d(x,y) > 0$, pero como $y \in B(x,r)$, tenemos que $0 < d(x,y) < r$ y por lo tanto $r - d(x,y) > 0$. Tomemos $\rho = r - d(x,y)$ y $z \in B(y,\rho)$, entonces, por la desigualdad triangular, tenemos que

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ &< d(x,y) + \rho \\ &= d(x,y) + r - d(x,y) \\ &= r \end{aligned}$$

y por lo tanto $z \in B(x,r)$, es decir $B(y,\rho) \subseteq B(x,r)$, lo que implica que $B(x,r)$ es un conjunto abierto. □

> **EJERCICIO 1.21.** Sean (E,d) un espacio métrico, $x \in E$ y $r > 0$. Demostrar que $B[x,r]$ es un conjunto cerrado.

Demostración. Para demostrar que $B[x,r]$ es un cerrado vamos a probar que $(B[x,r])^c$ es un conjunto abierto. Sea $y \in (B[x,r])^c$, entonces $d(x,y) > r > 0$ y por tanto $d(x,y) - r > 0$. Tomemos $\rho = d(x,y) - r$ y $z \in B(y,\rho)$, entonces, por la desigualdad triangular, tenemos que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ y además

$$\begin{aligned} d(x,z) &\geq d(x,y) - d(z,y) \\ &> d(x,y) - \rho \\ &= d(x,y) - d(x,y) + r \\ &= r. \end{aligned}$$

Por lo tanto $z \in (B[x,r])^c$. Es decir, $B(y,\rho) \subseteq (B[x,r])^c$, lo que implica que $(B[x,r])^c$ es abierto. □

EJERCICIO 1.22. Sean (E,d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente de elementos de E. Demostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. ¿Se tiene el recíproco de este resultado?

Demostración. Puesto que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, para un $\varepsilon > 0$, existen $x \in E$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se tiene que

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Definamos entonces $M = \text{máx}\{\varepsilon, d(x_0,x), \ldots, d(x_N,x)\}$, entonces tenemos que $x_n \in B(x,M)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, el conjunto $\{x_n \in E : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B(x,M)$ está acotado, es decir, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.

Notemos que el recíproco de esta proposición no se verifica, pues si tomamos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, pero no converge. □

EJERCICIO 1.23. Sean (E,d) un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente y $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función biyectiva. Demostrar que $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es también convergente.

Demostración. Sean L el límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\varepsilon > 0$. Se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica $|x_n - L| < \varepsilon$.

Definamos el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \phi(n) \leq N\} = \phi^{-1}(\{0, 1, \ldots, N\}),$$

como ϕ es biyectiva, entonces A es finito, por lo tanto podemos tomar $M = \max(A)$, con esto, tenemos que, si $n > M$, se tiene que $n \notin A$, por lo tanto $\phi(n) > N$, de dónde $|x_{\phi(n)} - L| < \varepsilon$. Así, $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ también converge. □

> **EJERCICIO 1.24.** Sean (E, d) un espacio métrico y $F \subseteq E$. Se tiene que F es cerrado si y solo si toda sucesión convergente de elementos de F tiene su límite en F.

Demostración. Primero, supongamos que toda sucesión sucesión convergente de elementos de F tiene su límite en F. Demostraremos que F es cerrado, es decir demostraremos que

$$\overline{F} = F.$$

La inclusión $F \subseteq \overline{F}$ se verifica por definición de clausura de un conjunto. Ahora, analicemos la inclusión contraria.

Supongamos que $x \in \overline{F}$, se tiene que

$$(\forall \varepsilon > 0)(B(x, \varepsilon) \cap F \neq \varnothing).$$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se sigue que

$$B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap F \neq \varnothing,$$

es decir, $\left\{B(x, \frac{1}{n}) \cap F\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una familia de conjuntos no vacíos. De donde, gracias al Axioma de Elección, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en F tal que

$$x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap F,$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Por lo tanto,

$$0 \leq d(x_n, x) < \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Así, concluimos que $d(x_n, x) \to 0$, cuando $n \to +\infty$. Por lo tanto, dado que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una sucesión en F, su límite está en F, es decir $x \in F$.

Recíprocamente, supongamos que F es cerrado, demostraremos que para toda sucesión convergente de elementos de F tiene su límite en F. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de F tal que

$$x_n \to x,$$

cuando $n \to +\infty$, para algún $x \in E$. Debemos demostrar que $x \in F$. Como F es cerrado, basta con demostrar que $x \in \overline{F}$.

Dado que $x_n \to x$, cuando $n \to +\infty$, se tiene que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n \geq N \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon).$$

Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(x_n, x) < \varepsilon$. Sabemos que $N + 1 > N$ por lo tanto, $d(x_{N+1}, x) < \varepsilon$, así,

$$x_{N+1} \in B(x, \varepsilon) \qquad \text{y} \qquad x_{N+1} \in F.$$

Por lo tanto, $x_{N+1} \in B(x, \varepsilon) \cap F$, se donde, concluimos que

$$B(x, \varepsilon) \cap F \neq \varnothing.$$

□

EJERCICIO 1.25. Sean (E, d) un espacio métrico, $x \in E$ y $A \subseteq E$. Entonces

$$d(x, A) = 0 \qquad \text{si y solo si} \qquad x \in \overline{A}.$$

Demostración. Supongamos que $d(x, A) = 0$, es decir

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, y) : y \in A\} = 0.$$

Por la caracterización de ínfimo, tenemos que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in A)(d(x, y) < \varepsilon),$$

por lo tanto, para $n \in \mathbb{N}^*$, existe $y \in A$ tal que $d(x, y) < \frac{1}{n}$, es decir,

$$A_n = \left\{ y \in A : d(x, y) < \frac{1}{n} \right\} \neq \varnothing,$$

de donde, se obtiene que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es una familia de conjuntos no vacíos. Gracias al Axioma de Elección, existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$y_n \in A \qquad \text{y} \qquad 0 \leq d(y_n, x) < \frac{1}{n}.$$

Así, se tiene que $y_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto $x \in \overline{A}$.

Recíprocamente, supongamos que $x \in \overline{A}$, dado que para todo $y \in A$, $d(x,y) \geq 0$, basta demostrar que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in A)(d(x,y) < \varepsilon).$$

Por lo tanto, sea $\varepsilon > 0$, dado que $x \in \overline{A}$, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $x_n \to x$ cuando $n \to +\infty$. Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Dado que $N+1 > N$, se tiene que $d(x_{N+1}, x) < \varepsilon$, además, $x_{N+1} \in A$. Por lo tanto, se cumple que $d(x, A) = 0$. $\square$

> **EJERCICIO 1.26.** Demostrar que $(\mathbb{R}^2, d)$ es un espacio métrico completo si
>
> $$\begin{aligned} d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}, \end{aligned}$$
>
> donde $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$.

Demostración. Para probar que $\mathbb{R}^2$ es completo, debemos demostrar que toda sucesión de Cauchy sobre $\mathbb{R}^2$ es convergente en $\mathbb{R}^2$. Sean $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^2$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$d(z_n, z_m) = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} < \varepsilon.$$

Ahora, puesto que

$$|x_n - x_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2} \leq \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} < \varepsilon$$

y que

$$|y_n - y_m| = \sqrt{(y_n - y_m)^2} \leq \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} < \varepsilon,$$

tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$; y ya que $\mathbb{R}$ es completo con la métrica usual, se sigue que existen $x, y \in \mathbb{R}$ tales que

$$x_n \to x \qquad \text{y} \qquad y_n \to y,$$

cuando $n \to +\infty$. Esto implica que $(x_n, y_n) \to (x, y)$, cuando $n \to +\infty$. Por lo tanto $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Se sigue entonces que $(\mathbb{R}^2, d)$ es completo. $\square$

EJERCICIO 1.27. Sea $\mathcal{C}([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$, se define, para $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$, la métrica

$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Demostrar que $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$ es un espacio métrico completo.

Demostración. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}([0,1])$, para todo $x \in [0,1]$ se tiene la sucesión $(f_n(x))$ en $\mathbb{R}$, demostraremos que esta última es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$, al ser (f_n) una sucesión de Cauchy existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > N \Longrightarrow d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Tomando $n, m > N$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\le \max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\le d_\infty(f_n, f_m) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $x \in [0,1]$, la sucesión $(f_n(x))$ es de Cauchy. Al ser $\mathbb{R}$ completo, existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, por lo tanto podemos definir

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \end{aligned}$$

Puesto que las funciones f_n son continuas sobre un intervalo cerrado y acotado, son uniformemente continuas, por tanto convergen a f uniformemente, es decir

$$d_\infty(f_n, f) \to 0,$$

cuando $n \to +\infty$. Además, se tiene que f es continua, es decir $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Por lo tanto $(\mathcal{C}([0,1]), d_\infty)$ es un espacio métrico completo. $\square$

EJERCICIO 1.28. Sea $\mathcal{C}([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$, se define, para $f,g \in \mathcal{C}([0,1])$, la métrica

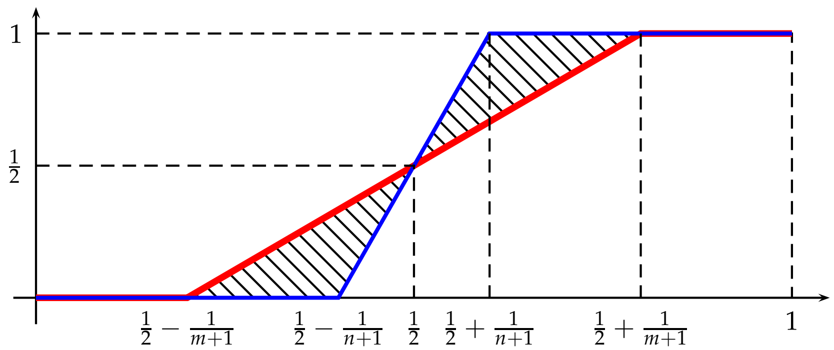
$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx.$$

Demostrar que $(\mathcal{C}([0,1]), d)$ no es un espacio métrico completo.

Demostración. Tomemos la siguiente sucesión de funciones, sea $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \\ \frac{n+1}{2}x + \frac{1-n}{4} & \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Demostraremos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy pero no converge. Sea $\varepsilon > 0$ para $n > m > 0$ se muestra en la siguiente figura el gráfico de las funciones f_n y f_m, en rojo y azul respectivamente.



Se tiene que el área sombreada representa $d(f_n, f_m)$, por lo tanto se tiene:

$$d(f_n, f_m) = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right|.$$

Puesto que la sucesión $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces es de Cauchy, por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > N \Longrightarrow \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right| < \varepsilon,$$

por lo tanto, si $n, m > N$ se tiene

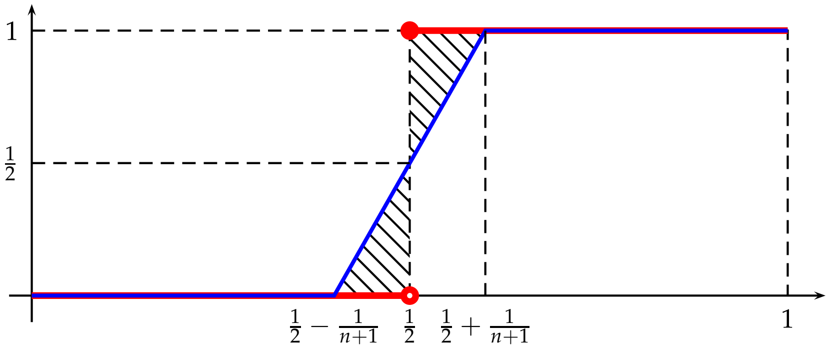
$$d(f_n, f_m) < \varepsilon,$$

es decir, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Por lo tanto tenemos una sucesión de Cauchy pero que no converge en $\mathcal{C}([0,1])$ pues, tomemos la función:

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$, para $n > 0$ se muestra en la siguiente figura el gráfico de las funciones f_n y f, en azul y rojo respectivamente.



Así, el área sombreada representa $d(f, f_n)$. Por lo tanto se tiene que

$$\|f_n - f\| = \left|\frac{1}{n+1}\right|.$$

Puesto que la sucesión $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N_1 \Longrightarrow \left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon,$$

por lo tanto, si $n > N_1$ se tiene

$$d(f_n, f) < \varepsilon,$$

pero $f \notin \mathcal{C}([0,1])$, por lo tanto $(\mathcal{C}([0,1]), d)$ no es un espacio métrico completo.

$\square$

Análisis Matemático I

El presente fascículo recolecta las principales definiciones, proposiciones y teoremas sobre Espacios Métricos, vistos en el curso de Análisis Matemático I, dictado en la carrera de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional. Además, presenta un compendio de ejercicios resueltos referentes a este tema, los cuales han sido desarrollados por Cristian Guachamín, Roque Miño, Luis Pozo, estudiantes de la Facultad de Ciencias, bajo la supervisión de Andrés Merino, profesor del Departamento de Matemática, quien ha dictado dicha asignatura.
Cualquier corrección, propuesta de cambio o mejora del presente trabajo se la puede realizar al correo: `mat.andresmerino@gmail.com`.

Proyecto CLAVEMAT

ISBN 978-0000-000-00-2

9 780000 000002 >